

3 Chaînes de Markov : généralités.

3.1 Introduction

De nombreux phénomènes aléatoires ont la propriété suivante : la connaissance de l'état du phénomène à un instant donné apporte sur le futur autant d'informations que la connaissance de tout le passé. Ce sont les processus de Markov, appelés "chaînes de Markov" si ce sont des processus à temps discret. Il se peut que la connaissance du futur dépende en fait d'un nombre fini (mais fixé) d'étapes dans le passé : c'est alors la succession de ce nombre fini d'étapes qui est dans ce cas un phénomène markovien.

Par exemple :

1. Gestion de stocks
2. Prix d'une action au temps t : $P_{t+1} = P_t(1 + r_{t+1})$ où r est le taux au temps t .
3. Dynamique linéaire : $X_{k+1} = A_k X_k + B_k \varepsilon_{k+1}$.
4. De façon générale, tous les phénomènes définis par une relation de récurrence aléatoire : $X_{n+1} = F(X_n, \varepsilon_{n+1})$, où (ε_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes.

On a ici des liens explicites, mais on peut avoir la donnée de la valeur d'une étape par sa loi conditionnelle sachant la valeur à l'étape précédente.

3.2 Noyaux de transition et Indépendance conditionnelle : rappels.

Nous commençons par quelques rappels sur les lois conditionnelles et l'indépendance conditionnelle de tribus.

Définition 3.1. (Noyaux de transition.) Soient (E, \mathcal{E}) et (F, \mathcal{F}) deux espaces mesurables. On appelle **probabilité de transition** de (E, \mathcal{E}) dans (F, \mathcal{F}) une application Q de $E \times \mathcal{F}$ dans $[0, 1]$ telle que :

1. Pour tout $B \in \mathcal{F}$, l'application $x \mapsto Q(x, B)$ est \mathcal{E} -mesurable,

2. Pour tout $x \in E$, l'application $B \mapsto Q(x, B)$ est une probabilité sur (F, \mathcal{F}) .

Ce n'est rien d'autre qu'une probabilité sur \mathcal{F} dépendant mesurablement d'un paramètre x dans E . On la notera $Q(x, dy)$.

Propriétés et notations.

1. Si $Q(x, dy)$ est une probabilité de transition de (E, \mathcal{E}) dans (F, \mathcal{F}) et f une fonction mesurable positive (ou négative, ou bornée) sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$, la fonction

$$G(x) = \int_F f(x, y)Q(x, dy)$$

est mesurable sur (E, \mathcal{E}) . On la notera parfois Qf ou $Q(f)$ lorsqu'elle ne dépendra pas de x :

$$Q(f)(x) = \int_F f(y)Q(x, dy).$$

2. Si μ est une mesure σ -finie sur (E, \mathcal{E}) , on définit une mesure $m(dx, dy)$ sur $E \times F$ par

$$\forall B \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}, m(B) = \int_E \int_F Q(x, B) \mu(dx).$$

Alors m est une mesure sur $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$. C'est une probabilité si μ en est une. On la note $Q(x, dy)\mu(dx)$, ou encore $Q \times \mu$, ou bien $\mu \times Q$. Si $f(x, y)$ est une fonction mesurable, positive ou intégrable sur le produit, on a

$$\int f(x, y)Q(x, dy)\mu(dx) = \int_E \left[\int_F f(x, y)Q(x, dy) \right] \mu(dx).$$

3. Si $f(x, y)$ est une fonction mesurable de deux variables sur $E \times F$, et si Y est une variable aléatoire à valeurs dans F , alors la loi de $f(x, Y)$ est un noyau de transition de E dans F .
4. **Définition** Si $Q(x, dy)$ et $Q_1(x, dy)$ sont deux noyaux de transition de E dans F , et si μ est une mesure positive sur E , on dit que Q_1 et Q sont égaux μ -presque partout si, pour tout $x \in E$ en dehors d'un ensemble de mesure nulle pour μ , les mesures $Q(x, dy)$ et $Q_1(x, dy)$ coïncident.

5. La deuxième marginale de la mesure $\mu \times Q$ est notée μQ . Si f est une fonction \mathcal{F} -mesurable, positive ou bornée, alors

$$\int f(y)\mu Q(dy) = \int_F f(y)Q(x, dy) = \int_E Q(f)(x)\mu(dx).$$

6. **Composition des noyaux** : Si Q est une probabilité de transition de (E, \mathcal{E}) dans (F, \mathcal{F}) et si R est une probabilité de transition de (F, \mathcal{F}) dans (G, \mathcal{G}) , on note pour tout $C \in \mathcal{F} \times G$:

$$(Q \times R)(x, C) = \int_F \left[\int_G R(y, dz) \mathbf{1}_C(y, z) \right] Q(x, dy).$$

Alors $Q \times R$ est une probabilité de transition de (E, \mathcal{E}) dans $(F \times G, \mathcal{F} \otimes \mathcal{G})$. On le notera aussi $Q(x, dy)R(y, dz)$.

En d'autres termes, si dans la construction de $\mu \times R$, nous remplaçons la mesure μ par un noyau Q , nous obtenons un noyau sur le produit au lieu d'une mesure.

7. Si Q et R sont deux noyaux comme plus haut, la deuxième marginale de la mesure $Q(x, dy)R(y, dz)$ sera notés $(QR)(x, dz)$. En d'autres termes, pour une fonction $f : G \mapsto \mathbb{R}$ positive ou bornée,

$$\int_G f(z)(QR)(x, dz) = \int_F \left[\int_G f(z)R(z, dy) \right] Q(x, dy).$$

Si μ est une sur E , on a $\mu(QR) = (\mu Q)R$. Si f est une fonction positive ou bornée de G dans \mathbb{R} , alors $(QR)(f) = Q(R(f))$.

8. **Produit de noyaux** Si Q est un noyau de (E, \mathcal{E}) dans (F, \mathcal{F}) et Q_1 un autre noyau de (E, \mathcal{E}) dans (F_1, \mathcal{F}_1) , alors il existe un (unique) noyau $Q \otimes Q_1$ sur $F \times F_1, \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}_1$ tel que, pour tout $B \in \mathcal{F}$ et tout $B_1 \in \mathcal{F}_1$, on ait

$$Q \otimes Q_1(x, B \times B_1) = Q(x, B)Q_1(x, B_1).$$

On note aussi $Q \otimes Q_1(x, (dy, dy_1)) = Q(x, dy)Q_1(x, dy_1)$.

Cette opération est pour les noyaux l'équivalent du produit tensoriel pour les mesures.

9. On pourrait de même définir des noyaux de $E \times E_1$ dans $F \times F_1$ par

$$Q(x, dy)Q_1(x_1, dy).$$

Définition 3.2. (Lois conditionnelles.) Soit un couple de variables aléatoires (X, Y) est à valeurs dans $E \times F$, et soit μ la loi de X . On appelle loi conditionnelle de X sachant Y n'importe quel noyau de transition $Q(x, dy)$ tel que la loi du couple (X, Y) s'écrive $Q(x, dy)\mu(dy)$. Cette loi est définie à l'égalité μ -presque partout près. On notera $Q(x, dy) = \mathcal{L}(Y/X = x)$ et $Q = \mathcal{L}(Y/X)$.

On a les propriétés suivantes :

1. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires à valeurs dans $E \times F$, et si f est une fonction bornée, et si $Q(x, dy)$ désigne la loi conditionnelle de Y sachant X , alors

$$\mathbf{E}(f(Y)/\sigma(X)) = Q(f)(X).$$

(L'espérance pour la loi conditionnelle est l'espérance conditionnelle.)

2. Si Q est la loi conditionnelle de Y sachant X et si μ est la loi de X , alors la loi de Y est μQ .
3. X est indépendante de Y si et seulement si $\mathcal{L}(Y/X = x)$ ne dépend pas de x . Dans ce cas, c'est la loi de Y .

(Ceci signifie plus exactement qu'en dehors d'un ensemble négligeable pour la loi de X , le noyau $Q(x, dy)$ est égal à une mesure de probabilité fixe $\nu(dy)$, qui est alors nécessairement la loi de Y .)

4. Si X et Y sont indépendantes et si $Z = F(X, Y)$, la loi de Z sachant $X = x$ est la loi de $F(x, Y)$. C'est faux si Y n'est pas indépendante de X .
5. Si $Y = f(X)$, la loi de Y sachant $X = x$ est la masse de Dirac $\delta_{f(x)}$.
6. Soit f une application mesurable de (F, \mathcal{F}) dans (G, \mathcal{G}) . Si nous convenons de noter $f^*\mu$ l'image d'une probabilité μ sur F par l'application f ($f^*\mu(B) = \mu(f^{-1}(B))$), alors la loi conditionnelle de $\mathcal{L}(f(Y)/X = x)$ est $f^*(\mathcal{L}(Y/X = x))$. En d'autres termes, la loi conditionnelle de l'image par f est l'image par f de la loi conditionnelle.
7. Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires à valeurs dans $E \times F$, si B est un ensemble \mathcal{F} mesurable, si $\mathcal{L}(Y/X) = Q$, on notera $\mathbf{P}(Y \in B/X)$ la variable aléatoire $Q(\mathbf{1}_B)(X)$.

Définition 3.3. (Indépendance conditionnelle.) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité, et soit $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ deux sous-tribus de \mathcal{A} , et soit \mathcal{A}_3 une sous tribu de $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2$.

On dit que \mathcal{A}_1 est conditionnellement indépendante de \mathcal{A}_2 sachant \mathcal{A}_3 , et on note $\mathcal{A}_1 \perp_{\mathcal{A}_3} \mathcal{A}_2$ si, pour toute fonction \mathcal{A}_1 mesurable bornée Z_1 , on a

$$\mathbf{E}(Z_1/\mathcal{A}_2) = \mathbf{E}(Z_1/\mathcal{A}_3).$$

On a les propriétés suivantes :

1. Cette relation est symétrique en $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$.
2. $\mathcal{A}_1 \perp_{\mathcal{A}_3} \mathcal{A}_2$ si et seulement si, pour toute variable Z_1 \mathcal{A}_1 -mesurable bornée, pour toute variable Z_2 \mathcal{A}_2 -mesurable bornée,

$$\mathbf{E}(Z_1 Z_2/\mathcal{A}_3) = \mathbf{E}(Z_1/\mathcal{A}_3)\mathbf{E}(Z_2/\mathcal{A}_3).$$

3. Si $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3)$ sont trois sous-tribus, que $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_2$, et que, $\forall X$ \mathcal{A}_1 -mesurable bornée, on ait $\mathbf{E}(X/\mathcal{A}_2) = \mathbf{E}(X/\mathcal{A}_3)$, alors $\sigma(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3) \perp_{\mathcal{A}_3} \mathcal{A}_2$. On n'a donc pas besoin a priori que la tribu \mathcal{A}_3 soit une sous-tribu de \mathcal{A}_1 pour avoir l'équivalence précédente. Mais, il est nécessaire que \mathcal{A}_3 soit une sous-tribu de \mathcal{A}_2 . En effet, si ε_1 et ε_2 sont deux variables de Bernoulli centrées et indépendantes, que $\varepsilon_3 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$, et si $\mathcal{A}_i = \sigma(\varepsilon_i)$, alors $\mathbf{E}(f(\varepsilon_1)/\mathcal{A}_2) = \mathbf{E}(f(\varepsilon_1)/\mathcal{A}_3) = \mathbf{E}(f(\varepsilon_1))$, tandis que $\mathbf{E}(\varepsilon_1 \varepsilon_2/\mathcal{A}_3) = \varepsilon_3$.
4. Si (X, Y, Z) sont trois variables aléatoires telles que $\mathcal{A}_1 = \sigma(X, Z)$, $\mathcal{A}_2 = \sigma(Y, Z)$ et $\mathcal{A}_3 = \sigma(Z)$, alors $\mathcal{A}_1 \perp_{\mathcal{A}_3} \mathcal{A}_2$ si et seulement si la loi conditionnelle de X sachant $(Y, Z) = (y, z)$ ne dépend que de z . Dans ce cas, on note $X \perp_Z Y$.
5. $X \perp_Z Y$ si et seulement si la loi conditionnelle de (X, Y) sachant $Z = z$ est le produit de la loi de X sachant $Z = z$ et de la loi de Y sachant $Z = z$:

$$\mathcal{L}((X, Y)/Z = z) = \mathcal{L}(X/Z = z) \otimes \mathcal{L}(Y/Z = z).$$

6. Si (X_1, X_2, X_3) sont trois variables aléatoires indépendantes, si $X = F(X_1, X_2)$ et $Y = G(X_2, X_3)$, alors $X \perp_{X_2} Y$.
7. Si la loi $\mu(dx, dy, dz)$ du triplet (X, Y, Z) admet une densité par rapport à une mesure produit $\mu_1(dx)\mu_2(dy)\mu_3(dz)$, alors $X \perp_Z Y$ si et seulement si

$$\mu(dx, dy, dz) = f(x, z)g(z, y)\mu_1(dx)\mu_2(dy)\mu_3(dz).$$

8. Si les variables (X, Y, Z) ne prennent qu'un nombre fini ou dénombrables de valeurs, alors $X \perp_Z Y$ si et seulement si $\forall (x, y, z)$,

$$\mathbf{P}(X = x, Y = y, Z = z)\mathbf{P}(Z = z) = \mathbf{P}(X = x, Z = z)\mathbf{P}(Y = y, Z = z).$$

3.3 Chaînes de Markov : définitions.

Nous introduisons ici la notion de chaîne de Markov, en général, sans nous restreindre au cas des chaînes de Markov finies. Nous en donnons les premières propriétés élémentaires.

Définition 3.4. On appelle **chaînes de Markov** sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, un processus $(X_n, n \in \mathbb{N})$ à valeurs dans (E, \mathbf{E}) tel que pour tout $B \in \mathcal{F}$, et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X_{n+1} \in B / X_0, \dots, X_n) = \mathbf{P}(X_{n+1} \in B / X_n).$$

La proposition suivante est immédiate :

Proposition 3.5. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires à valeurs dans E , et soit $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$.

1. (X_n) est une chaîne de Markov si et seulement si, pour tout n , pour presque tout (x_0, \dots, x_n) de E^n , la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_0, \dots, X_n) = (x_0, \dots, x_n)$ ne dépend que de x_n . (Ici la notion de "presque tout" se réfère à la loi de (X_0, \dots, X_n) .)

2. (X_n) est une chaîne de Markov si et seulement si, pour tout n ,

$$(X_{n+1}, X_n) \perp_{X_n} (X_0, \dots, X_n).$$

3. Si (X_n) est une chaîne de Markov, si $p_n(x, dy)$ désigne pour tout n la loi de X_{n+1} sachant $X_n = x$, et si $\mu_0(dx)$ est la loi de X_0 , alors la loi de (X_0, \dots, X_n) est

$$\mu_0(dx_0) \times p_0(x_0, dx_1) \times \dots \times p_{n-1}(x_{n-1}, dx_n).$$

4. Avec les mêmes notations que dans le point précédent, la loi de $(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots, X_{n+k})$ sachant que $X_n = x_n$ est

$$p_n(x_n, dx_{n+1}) \times \dots \times p_{n+k-1}(x_{n+k-1}, dx_{n+k}).$$

5. Si (X_n) est une chaîne de Markov, alors pour $0 < n < p$, on a

$$(X_0, \dots, X_n) \perp_{X_n} (X_{n+1}, \dots, X_p).$$

(On dit que le futur est conditionnellement indépendant du passé sachant le présent.)

6. Plus généralement, si (X_n) est une chaîne de Markov, pour tous $0 < n < p < q$, on a

$$(X_0, \dots, X_p) \perp_{(X_n, \dots, X_p)} (X_n, \dots, X_q).$$

7. Si (X_n) est une chaîne de Markov, si, pour $N > 0$, on pose $Y_n = X_{(N-n) \vee 0}$, alors Y_n est une chaîne de Markov. On l'appelle la chaîne retournée de la chaîne X à l'instant n .

Démonstration. — Compte tenu des rappels précédents sur les lois conditionnelles et l'indépendance conditionnelle, les démonstrations sont élémentaires et laissées au lecteur à titre d'exercice. ■

Exemple. — L'exemple le plus fondamental de chaîne de Markov est le suivant. On se donne une suite de variables aléatoires (ε_n) à valeurs dans un espace mesuré (F, \mathcal{F}) , indépendantes, et une suite de fonctions mesurables $F_n : E \times F \mapsto E$. Si X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans E , indépendante de toute la suite (ε_n) , alors, la suite définie par la relation de récurrence $X_{n+1} = F_n(X_n, \varepsilon_n)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans E .

Pour le voir, il suffit de remarquer que, si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, alors la variable aléatoire X_n est mesurable par rapport à \mathcal{F}_n (immédiat par récurrence), et donc la loi de X_{n+1} sachant $(X_0, X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (x_0, e_1, \dots, e_n)$ est la loi de $F(x_n, \varepsilon_{n+1})$: elle ne dépend que de x_n , et par conséquent

$$(X_{n+1}, X_n) \perp_{X_n} (X_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n),$$

et a fortiori

$$(X_{n+1}, X_n) \perp_{X_n} (X_0, X_1, \dots, X_n).$$

On voit dans cet exemple qu'en fait on peut avoir la propriété d'indépendance conditionnelle par rapport à une filtration plus grosse que la filtration naturelle de la suite (X_n) .

Définition 3.6. Soit Q une probabilité de transition de (E, \mathcal{E}) dans lui-même et ν une probabilité sur (E, \mathcal{E}) . Une chaîne de Markov $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est **homogène de loi initiale ν et de transition Q** si

$$\forall B \in \mathbf{E}, \mathbf{P}(X_0 \in B) = \nu(B); \forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{P}(X_{n+1} \in B / X_0, \dots, X_n) = Q(X_n, B).$$

Une chaîne **non homogène** serait telle que $\mathbf{P}(X_{n+1} \in B / X_0, \dots, X_n) = Q_n(X_n, B)$, où le noyau Q_n dépendrait de n .

Exemple. — Dans l'exemple précédent $X_{n+1} = F_n(X_n, \varepsilon_{n+1})$, la chaîne est homogène lorsque

1. La fonction F ne dépend pas de n .
2. La loi de la variable aléatoire ε_n ne dépend pas de n .

Dans ce cas, le noyau $Q(x, dy)$ est la loi de $F(x, \varepsilon_1)$.

Si (X_n) est une chaîne homogène de noyau de transition Q , la donnée de la loi de X_0 détermine pour tout n la loi de (X_0, \dots, X_n) . C'est une conséquence élémentaire de la proposition précédente. Nous appellerons (provisoirement) cette loi \mathbf{P}_n .

On a en particulier

Proposition 3.7. *Soit (X_n) une chaîne homogène de noyau Q .*

1. *Si μ_0 désigne la loi de X_0 , alors la loi de X_n est $\mu_0 Q^{(n)}$.*
2. *Si $f : E \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée ou positive, et si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, alors pour tout n*

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n) = Q(f)(X_n).$$

Il faut faire attention à ce que, en général, la chaîne retournée à l'instant n d'une chaîne homogène n'est plus homogène. Cette propriété dépendra du choix de la loi initiale μ_0 .

Remarque. — Si une suite X_n adaptée à la filtration \mathcal{F}_n a la propriété que, pour tout n , et toute fonction mesurable bornée f , $\mathbf{E}(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n)$ est une fonction de $g(X_n)$, alors c'est une chaîne de Markov. L'application qui à f associe la fonction g est linéaire et se représente par un noyau Markovien $g = Q_n(f)$. On obtient donc une chaîne homogène de noyau Q dès que ce noyau ne dépend pas de n .

3.4 L'espace canonique.

Dans la suite, nous fixerons la plupart du temps le noyau de transition Q , mais nous ferons varier la loi initiale μ_0 . Nous pouvons alors nous poser la question suivante :

Si l'on se donne l'espace d'états (E, \mathcal{E}) , la probabilité ν et la probabilité de transition Q de (E, \mathcal{E}) dans lui-même, existe-t-il toujours un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et un processus X qui serait une chaîne de Markov homogène de loi initiale ν et de transition Q .

Une réponse positive est apportée avec l'espace $\Omega = E^{\mathbb{N}}$, c'est à dire l'ensemble des suites à valeurs dans E . Si $\omega = (\omega_n)$, alors on pose $X_n(\omega) = \omega_n$, c'est à dire que X_n est la n ème coordonnée. Sur cet espace, on considère la tribu $\mathcal{A} = \sigma(X_n, n \geq 0)$, c'est à dire la plus petite tribu qui rende mesurable ces fonctions coordonnées : on l'appelle la tribu cylindrique.

On admettra le résultat suivant, qui n'est rien d'autre qu'un théorème de construction de probabilités sur un produit infini d'espaces; c'est une conséquence du théorème de Kolmogorov sur la constructions de probabilités sur un produit infini d'espaces.

Proposition 3.8. *Si l'ensemble E est fini ou dénombrable, et plus généralement si c'est un espace topologique localement compact muni de sa tribu borélienne, il existe une unique probabilité sur cet espace (Ω, \mathcal{A}) , que nous noterons \mathbf{P}_ν ayant la propriété suivante : pour tout entier n , la loi de (X_0, \dots, X_n) sous cette probabilité est la probabilité \mathbf{P}_n définie ci-dessus pour la chaîne de Markov de noyau Q et de loi initiale ν :*

$$\mathbf{P}_\nu((X_0, \dots, X_n) \in B_0 \times \dots \times B_n) = \int_{B_0} \nu(dx_0) \int_{B_1 \times \dots \times B_n} Q(x_0, dx_1) \dots Q(x_{n-1}, dx_n).$$

Cet exemple est connu comme la **version canonique** de la chaîne de Markov homogène de loi initiale ν et de transition Q . L'espace lui-même est appelé **l'espace canonique**.

L'avantage de cette version canonique est que les trajectoires sont intrinsèques : elles ne dépendent ni de ν ni de Q . Cela facilite l'étude simultanée de familles de processus correspondant à des familles de couples (ν, Q) .

Puisque la plupart du temps, Q sera fixée, mais que ν variera, on utilise la notation \mathbf{P}_ν pour indiquer la dépendance en ν . Lorsque ν est la mesure de Dirac au point $x \in E$, \mathbf{P}_ν se note \mathbf{P}_x . Nous noterons l'espérance d'une variable mesurable Z pour cette probabilité $\mathbf{E}_\nu(Z)$ (ou $\mathbf{E}_x(Z)$ si $\nu = \delta_x$).

Supposons maintenant que l'on ait une autre chaîne de Markov (Y_n) sur un autre espace $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbf{P}_1)$, de même noyau Q et de même loi initiale ν . Nous pouvons considérer l'application $Y : \Omega_1 \mapsto \Omega$, qui à un $\omega \in \Omega_1$ associe la suite $(Y_n(\omega))$. Tout est fait pour que cette application soit une variable aléatoire à valeurs dans l'espace canonique. Dans ce cas, la mesure image de \mathbf{P}_1 par cette application Y n'est rien d'autre que la mesure \mathbf{P}_ν . On ne perd donc rien en général à supposer que l'espace

de probabilité sur lequel nous nous situons est l'espace canonique. Nous verrons plus bas l'intérêt de travailler dans ce cadre.

La connaissance des mesures \mathbf{P}_x suffit en général, en vertu du résultat suivant :

Proposition 3.9. *Soit ν une loi initiale, et B un borélien de l'espace canonique. Alors,*

$$\mathbf{P}_\nu(B) = \int_E \mathbf{P}_x(B) \nu(dx).$$

Si Z est une variable \mathcal{A} mesurable sur l'espace canonique, positive ou bornée, alors

$$\mathbf{E}_\nu(Z) = \int_E \mathbf{E}_x(Z) \nu(dx).$$

En d'autres termes, il suffit d'étudier le comportement de la chaîne lorsqu'elle part d'une mesure initiale concentrée en un point x .

Démonstration. — Puisque la tribu est engendrée par les variables (X_n) , il suffit de le démontrer lorsque $B \in \sigma(X_0, \dots, X_n)$, ou mieux lorsque $B = B_0 \times B_1 \times \dots \times B_n$, car de telles parties forment une classe stable par intersection qui engendre la tribu (par définition).

Dans ce cas, pour un tel B ,

$$\mathbf{P}_x(B) = \mathbf{1}_{B_0}(x) \int_{E^n} \mathbf{1}_{B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n} Q(x, dx_1) Q(x_1, dx_2) \cdots Q(x_{n-1}, dx_n),$$

tandis que

$$\mathbf{P}_\nu(B) = \int_{E^{n+1}} \mathbf{1}_{B_0 \times B_1 \times B_2 \times \dots \times B_n} \nu(dx_0) Q(x_0, dx_1) Q(x_1, dx_2) \cdots Q(x_{n-1}, dx_n).$$

La formule est donc immédiate.

Le passage des ensembles aux variables aléatoires est immédiat (argument de classes monotones ou bien limites). ■

4 Chaînes de Markov finies.

Dans tout ce chapitre, nous allons nous intéresser aux chaînes de Markov à valeurs dans un ensemble E fini, que nous munissons de la tribu $\mathcal{P}(E)$. Nous supposons à partir de maintenant que le cardinal de E est un nombre n fixé. Nous pouvons aussi

bien décider que $E = \{1, \dots, n\}$, mais nous ferons jouer aucun rôle particulier à l'ordre dans lequel les points de E sont énumérés.

Une fonction sur E à valeurs réelles se représente par le vecteur de $\mathbb{R}^n (f(x)_{x \in E})$, que nous convenons de représenter dans une notation matricielle par un **vecteur colonne** $[f]$, s'il faut préciser qu'on s'intéresse à la matrice de f .

Une mesure μ de probabilité sur E se représente par un vecteur $(\mu(x))_{x \in E}$ de \mathbb{R}^n , dont tous les coefficients sont positifs, et dont la somme des coefficients vaut 1. Nous conviendrons de la représenter par un **vecteur ligne** $[\mu]$, s'il faut préciser qu'on s'intéresse à la matrice de μ . Si on munit cet ensemble des lois de probabilités sur E de la topologie ordinaire de \mathbb{R}^n (qui coïncide ici avec celle de la convergence étroite), nous voyons que c'est un ensemble compact. C'est le simplexe de \mathbb{R}^n , il est homéomorphe à la boule unité de \mathbb{R}^{n-1} .

Nous pouvons alors représenter la dualité usuelle entre fonctions et mesures comme

$$\int_E f d\mu = \sum_{x \in E} f(x)\mu(x) = \langle \mu, f \rangle = [\mu][f].$$

Un noyau de transition P se représente par une matrice carrée $n \times n$, où n est le cardinal de E : $P = (P(x, y))$, qu'on notera $[P]$ s'il faut distinguer le noyau de sa matrice. Si P est la loi de Y sachant X , alors $P(x, y) = \mathbf{P}(Y = y / X = x)$: tous les coefficients de P sont positifs et la somme de chaque ligne est égale à 1.

Définition 4.1. *On appellera **matrice markovienne** une matrice carrée dont tous les coefficients sont positifs et dont la somme de chaque ligne est égale à 1.*

*On dira que la matrice est **sous-markovienne** si ses coefficients sont positifs et la somme de chaque ligne est inférieure ou égale à 1.*

On a alors, en notations matricielles, pour un noyau Q , une probabilité μ et une fonction f :

$$[Q(f)] = [Q][f]; [\mu Q] = [\mu][Q]; \langle \mu, Qf \rangle = \langle \mu Q, f \rangle = [\mu][Q][f].$$

La fonction constante égale à 1 sera notés $\mathbf{1}$, et sa matrice $[\mathbf{1}]$.

Si (X_n) est une chaîne de Markov homogène de noyau de transition P , on appellera P la **matrice de la chaîne** X .

Les propriétés suivantes des matrices Markoviennes sont élémentaires :

Proposition 4.2. 1. Une matrice est P markovienne si et seulement si elle préserve les fonctions positives et si $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$.

2. Le produit de deux matrices markoviennes est markovienne.

3. Une matrice P est markovienne si et seulement si, pour toute probabilité μ sur E , μP est une probabilité.

4. La ligne $y \mapsto P(x, y)$ de la matrice markovienne P n'est rien d'autre que la mesure $\delta_x P$.

5. Si (X_n) est une chaîne de Markov homogène de matrice P et de loi initiale μ_0 , la loi de X_n est $\mu_0 P^n$.

6. Si X_n est une chaîne de Markov homogène de matrice P , et si $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$, alors

$$\mathbf{E}(f(X_{n+1})/\mathcal{F}_n) = P(f)(X_n).$$

7. Avec les mêmes notations que plus haut

$$\forall n < p, \mathbf{E}(f(X_{n+p})/\mathcal{F}_n) = P^p(f)(X_n).$$

Toutes les chaînes de Markov sur un ensemble fini (et même sur un ensemble mesurable quelconque) s'obtiennent par le procédé de récurrence décrit plus haut : plus exactement, étant donné une matrice markovienne P et une loi initiale μ_0 , on peut construire une chaîne de Markov de matrice P et de loi initiale μ_0 de la forme $X_{n+1} = F(X_n, \varepsilon_{n+1})$ avec une suite (ε_n) de variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Pour cela, nous nous donnons X_0 de loi μ_0 , et une suite de ε_n variables aléatoires à valeurs dans E^E , indépendantes entre elles et indépendantes de X_0 . Un point ε de E^E est une fonction $\varepsilon(x)$ de E dans E . Si $\varepsilon_k = (\varepsilon_k(x), x \in E)$, alors on choisit la loi de ε_k de telle manière que la loi de $\mathbf{P}(\varepsilon_k(x) = y) = P(x, y)$. Si nous définissons maintenant $f : E^E \times E \rightarrow E$ par $F(x, \varepsilon) = \varepsilon(x)$, alors $F(X_n, \varepsilon_{n+1})$ est bien un chaîne de Markov de matrice P . Remarquons qu'on a le choix de la loi jointe des variables $\varepsilon_k(x), x \in E$, pour fabriquer la même chaîne de Markov.

Bien évidemment, dans la pratique, c'est un procédé trop peu économique, en terme de temps de calcul par exemple, pour être utilisable pour simuler une suite markovienne.

4.1 Mesure invariante.

Parmi les loi initiales pour la chaîne X , il en est qui jouent des rôles particulier importants :

Définition 4.3. On dit qu'une probabilité sur μ E est **invariante** (on dit aussi **stationnaire**) pour la matrice markovienne P (ou pour la chaîne X homogène de noyau P si $\mu P = \mu$).

En d'autres termes, si la chaîne a comme loi initiale une mesure μ invariante, la loi de X_n reste égale à μ .

Un cas particulier important est celui des matrices bi-stochastiques, c'est à dire lorsque la matrice P est telle que la somme de toutes ses colonnes vaut 1 (sa transposée est une matrice markovienne). Alors, on voit immédiatement que la mesure uniforme est invariante.

Une autre définition équivalente de l'invariance de la mesure est la suivante :

Proposition 4.4. Une probabilité μ sur E est invariante si, pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\int_E P(f)(x) \mu(dx) = \int_E f(x) \mu(dx).$$

Démonstration. — Si μ est invariante, nous écrivons

$$\int P(f)(x) \mu(dx) = \sum_x \sum_y f(y) \mu(x) P(x, y) = \sum_y f(y) \mu(y).$$

Réciproquement, si nous écrivons ce qui précède pour $f = \mathbf{1}_y$, alors $P(f)(x) = P(x, y)$, et nous obtenons

$$\mu(y) = \sum_x \mu(x) P(x, y),$$

ce qui est la propriété cherchée. ■

La finitude de E nous assure l'existence d'une probabilité invariante, comme le montre la proposition suivante :

Théorème 4.5. (Perron-Frobenius) Si P est une matrice markovienne, elle admet une probabilité invariante.

Plus généralement, si P est une matrice à coefficient positifs, non tous nuls, il existe un $\lambda \geq 0$, et un vecteur X à coefficients positifs ou nuls, tel $PX = \lambda X$.

On peut choisir $\lambda > 0$ dès que la somme de chaque colonne de P est strictement positive.

Remarque. — Si P est markovienne, une mesure invariante est donc un vecteur propre de la matrice transposée tP de P , de valeur propre 1. Il n'est pas étonnant que tP admette 1 comme valeur propre, puisque $P\mathbf{1} = \mathbf{1}$, et par conséquent 1 est valeur propre de P (les valeurs propres de P et de tP sont les mêmes avec le même ordre de multiplicité). Mais ce que dit le théorème précédent est que le vecteur propre associé peut être choisi à coefficients positifs (et donc à une probabilité en le multipliant par une constante convenable).

Démonstration. — Commençons par le cas des matrices Markoviennes, qui est facile : l'ensemble \mathcal{M} des probabilités sur E est un compact. L'application $\mu \rightarrow \mu P$ est continue et laisse ce compact fixe. Soit alors μ_0 une probabilité quelconque, et considérons la suite

$$\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \mu_0 P^i.$$

C'est une suite de probabilités, donc de points dans un compact, elle admet donc une sous-suite convergente vers une valeur μ , dont il nous reste à montrer que c'est une mesure invariante. Mais si μ_{n_k} converge vers μ , nous avons

$$\mu_{n_k} P = \mu_{n_k} + \frac{\mu_0 P^{n_k+1} - \mu_0}{n_k + 1}.$$

Lorsque $k \rightarrow \infty$, $(\mu_0 P^{n_k+1} - \mu_0)/(n_k + 1)$ converge vers 0, puisqu'il s'agit de la différence de deux mesures de probabilités divisée par $n_k + 1$. Alors, nous voyons en passant à la limite que $\mu = \mu P$.

Le cas des matrices à coefficients positifs est plus difficile (et inutile pour nous dans un premier temps). Commençons par le cas où la somme de toutes les lignes de P est strictement positive, auquel cas on va pouvoir choisir $\lambda > 0$.

Remarquons que $\mu \rightarrow \mu P$ ne préserve plus les lois de probabilité. Appelons $|\mu P|$ la masse totale de la mesure positive μP , c'est à dire

$$|\mu P| = \sum_{x,y} \mu(x) P(x,y).$$

Puisque, par hypothèse, $\sum_y P(x,y) \geq a > 0$, pour un certain $a > 0$, alors $|\mu P| \geq a$ pour toute loi de probabilité, et donc l'application $\mu \rightarrow F(\mu) = \mu P/|\mu P|$, qui transforme les lois de probabilités en lois de probabilités est continue. Mais l'ensemble des lois de probabilités est identique au simplexe de \mathbb{R}^n , qui est homéomorphe à la boule unité de \mathbb{R}^{n-1} .

Or, le théorème du point fixe de Brouwer affirme que toute application continue de la boule unité de \mathbb{R}^{n-1} dans elle-même admet un point fixe. Ce théorème reste vrai pour tous les espaces topologiques homéomorphes à la boule, et c'est le cas de l'ensemble des probabilités sur un ensemble fini à n points.

L'application F admet donc un point fixe, c'est à dire et qu'il existe une probabilité μ telle que $\mu P = |\mu P| \mu$. C'est bien la mesure invariante cherchée.

Dans le cas général, nous pouvons toujours ajouter une quantité $1/n > 0$ à tous les coefficients de la matrice. Nous obtenons ainsi une matrice P_n , une probabilité μ_n et un réel $\lambda_n > 0$ tels que $\mu_n P_n = \lambda_n P_n$. Extrayons de μ_n une sous-suite μ_{n_k} qui converge vers une probabilité μ . Alors, $\lambda_{n_k} = |\mu_{n_k} P_{n_k}|$ converge vers $\lambda = |\mu P|$, et nous obtenons $\mu P = \lambda P$ à la limite. ■

Remarque. — Dans le cas des matrices markoviennes, le lecteur pourra montrer que, si $m = (m_i)$ est un vecteur propre (éventuellement complexe) de ${}^t P$, de valeur propre 1, alors le vecteur $|m| = (|m_i|)$ est aussi vecteur propre de valeurs propre 1. Ceci redémontre l'existence d'un vecteur propre à coefficients positifs.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, si la suite (X_n) est markovienne, il en va de même de la suite retournée au temps N ($Y_n = (X_{(N-n) \vee 0})$). Mais, si la chaîne (X) est homogène, il n'en va pas de même avec la chaîne retournée en général. (C'est à dire que les probabilités de transition de Y_n à Y_{n+1} peuvent dépendre de n). En effet, si nous appelons μ_p la loi de X_p , alors la loi de X_p sachant X_{p+1} est

$$\mathbf{P}(X_{p+1} = x \mid X_p = y) = \mathbf{P}(X_p = y \mid X_{p+1} = x) \mu_{p+1}(x) / \mu_p(y).$$

Mais, lorsque μ est une mesure stationnaire, alors μ_p est indépendante de p , et la suite markovienne (Y_k) est elle aussi stationnaire. Sa matrice de transition est donnée par $Q(x, y) = P(y, x) \mu(y) / \mu(x)$.

Définition 4.6. Lorsque P est une matrice markovienne de mesure invariante μ et que $\mu(x) > 0$ pour tous les points $x \in E$, on appelle matrice adjointe de P la matrice $Q(x, y) = P(y, x) \mu(y) / \mu(x)$.

Proposition 4.7. Soit P une matrice markovienne et μ une probabilité invariante telle que $\mu(x) > 0, \forall x \in E$. Alors, la matrice Q définie dans 4.6 est markovienne. Elle admet la mesure μ comme mesure invariante, et on a, pour toutes les fonctions f et g définies sur E à valeurs réelles

$$(4.6) \quad \int_E P(f)(x) g(x) \mu(dx) = \int_E f(x) Q(g)(x) \mu(dx).$$

De même, si, pour toute probabilité ν sur E , on dénote par $d\nu/d\mu$ la densité $g(x) = \nu(x)/\mu(x)$, alors

$$(4.7) \quad \frac{d(\nu P)}{d\mu}(x) = Q\left(\frac{d\nu}{d\mu}\right)(x).$$

Démonstration. — Montrons d'abord que la matrice Q est markovienne. Il s'agit de démontrer d'abord que la somme des lignes de Q vaut 1, ce qui se traduit par

$$\sum_y \mu(y)P(y, x)/\mu(x) = 1.$$

Or, nous savons que $\mu(x) = \sum_y \mu(y)P(y, x)$ par définition de la mesure invariante.

L'équation 4.6 s'écrit

$$\sum_{(x,y) \in E^2} f(y)g(x)P(x, y)\mu(x) = \sum_{(x,y) \in E^2} f(x)g(y)Q(x, y)\mu(x),$$

ce qui est immédiat d'après la définition.

Enfin, l'équation 4.7 est tout aussi immédiate : on écrit

$$\frac{d(\nu P)}{d\mu}(x) = \sum_y \nu(y)P(y, x)/\mu(x) = \sum_y Q(x, y) \frac{\nu(y)}{\mu(y)}.$$

■

Un cas particulier important est le cas des chaînes réversibles, c'est à dire celles pour lesquelles la matrice adjointe Q est égale à P . Dans ce cas, l'opérateur $f \rightarrow P(f)$ est **symétrique** dans l'espace $L^2(\mu)$. C'est une façon rapide de vérifier qu'une probabilité donnée est invariante dans quelques cas simples, grâce à la proposition 4.9

Définition 4.8. *On dira qu'une probabilité μ est réversible si, pour tous les points x et y de E , on a $\mu(x)P(x, y) = \mu(y)P(y, x)$.*

La remarque suivante est fort utile

Proposition 4.9. *Si μ est une mesure réversible, elle est invariante.*

Démonstration. — C'est immédiat. Nous écrivons, pour toute fonction f

$$\int P(f)(x)\mu(dx) = \int f(x)P(\mathbf{1})(x)\mu(dx) = \int f(x)\mu(dx).$$

Il ne nous reste qu'à appliquer la proposition 4.4 ■

Remarque. — Si la mesure μ est réversible et charge tous les points, elle munit l'espace \mathbb{R}^n d'une structure euclidienne (la structure de $L^2(\mu)$) donnée par $[f].[g] = \sum_x f(x)g(x)\mu(x)$. Dans ce cas, dans une base orthonormée pour cette structure, l'opérateur $f \mapsto Pf$ est symétrique : les valeurs propres de la matrice P sont donc réelles. On verra plus bas qu'elle sont toujours de module inférieur à 1.

Si la loi de X_0 est une mesure invariante, alors la suite $(Y_p)_{p=0, \dots, n}$ retournée égale à $(X_{n-p})_{p=0, \dots, n}$ est homogène. Si cette mesure est réversible, alors elle a même loi que $(X_p)_{p=0, \dots, n}$. C'est de là que vient le nom de réversible.

Un corollaire immédiat mais très utile dans la pratique est le suivant :

Corollaire 4.10. *Si la matrice P est symétrique, alors la mesure uniforme est réversible, donc invariante.*

Exemple. — LE MODÈLE D'ERHENFEST N particules sont placées dans deux récipients A et B . À chaque instant, on choisit au hasard une particule et on la change de récipient. On considère alors le nombre X_n de particules présentes dans le récipient A à l'instant n . C'est une chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, \dots, N\}$, dont la probabilité de transition $P = (p(i, j))$ est donnée par

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k - 1 \mid X_n = k) = k/N,$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = k + 1 \mid X_n = k) = 1 - k/N,$$

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = k) = 0, \text{ si } j \neq k - 1, k + 1.$$

On voit alors que la probabilité binômiale

$$p_N(k) = C_N^k / 2^N, \quad k = 0, \dots, N,$$

est réversible, et donc invariante. En effet, pour tout $k = 0, \dots, N$, on a

$$p_N(k)p(k, k + 1) = p_N(k + 1)p(k + 1, k).$$

Ceci restant vrai en posant $p_N(N + 1) = p_N(-1) = 0$. L'équation précédente suffit à assurer la réversibilité, quitte à changer k en $k - 1$, car tous les autres coefficients de la matrice sont nuls.

4.2 Classification des états

Dans cette section, nous allons caractériser les chaînes de Markov pour lesquelles la mesure invariante est unique. Cette caractérisation s'exprime en terme d'unicité d'une classe d'équivalence pour une relation d'équivalence sur l'ensemble E que nous définissons dans ce qui suit.

Définition 4.11. Soit $P = (P(x, y))$ une matrice markovienne.

1. Nous dirons que $x < y$ si $P(x, y) > 0$.
2. Nous dirons que $x \ll y$ si il existe une suite finie de points de E : $x = x_0, x_1, \dots, x_p = y$, telle que, pour tout $k = 0, \dots, p - 1$, $x_k < x_{k+1}$.
3. Nous dirons qu'un point x est récurrent si,

$$\forall y \in E, x \ll y \implies y \ll x.$$

4. Nous dirons qu'un point x est transitoire s'il n'est pas récurrent.

Nous noterons \mathcal{T} l'ensemble des points transitoires et \mathcal{R} l'ensemble des points récurrents.

Remarques

1. Pour tout x de E , puisque $\sum_y P(x, y) = 1$, il y a au moins un point y tel que $x > y$.
2. $x \ll y$ si et seulement si il existe un entier $p \geq 1$ tel que $P^p(x, y) > 0$. En effet,

$$P^p(x, y) = \sum_{(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{p-1}}) \in E^{p-1}} P(x, x_{i_1})P(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdots P(x_{i_{p-1}}, y).$$

Dans la somme précédente, tous les termes sont positifs ou nuls; la somme n'est donc non nulle que si un des termes au moins ne l'est pas : c'est la définition de $x \ll y$.

3. Lorsque $P^p(x, y) > 0$, nous dirons pour les raisons qui précèdent qu'il existe un chemin de longueur p qui va de x à y .

4. La relation $x \ll y$ est transitive : en effet, si $P^p(x, y) > 0$ et $P^q(y, z) > 0$, alors $P^{p+q}(x, z) > 0$, puisque

$$P^{p+q}(x, z) = \sum_{y_1} P^p(x, y_1)P^q(y_1, z) \geq P^p(x, y)P^q(y, z) > 0.$$

5. On peut avoir ou non $x < x$, ou $x \ll x$. Si le point x est récurrent, alors nécessairement $x \ll x$, puisqu'il existe au moins un point y tel que $x < y$, et donc alors $y \ll x$ et par suite $x \ll x$. Par contre, un point transitoire x peut ou non satisfaire $x \ll x$: considérons les deux matrices markoviennes suivantes sur les deux points $\{1, 2\}$:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; P_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas, le point 1 est transitoire, mais la relation $1 \ll 1$ est fausse pour P_1 et vraie pour P_2 .

6. Si $x \ll y$ et si x est récurrent, alors y est récurrent : il suffit d'appliquer la propriété de transitivité de la relation \ll .

L'ensemble des points transitoires peut être vide, mais pas l'ensemble des points récurrents si l'ensemble E lui même est non vide. Plus précisément, on a la proposition suivante:

Lemme 4.12. *Appelons \mathcal{TR} l'ensemble des points transitoires t tels qu'il existe un récurrent r avec $t < r$. Alors, si $t \in \mathcal{T}$, soit $t \in \mathcal{TR}$, soit il existe un point t' dans \mathcal{TR} tel que $t \ll t'$. En particulier, E étant non vide, l'ensemble \mathcal{R} des points récurrents est non vide.*

Démonstration. — Notons pour simplifier $t \dashv t'$ si la relation $t \ll t'$ est fausse. Soit $t_0 \in \mathcal{T}$, et montrons d'abord qu'il existe un point $r \in \mathcal{R}$ tel que $t_0 \ll r$. Pour cela, raisonnons par l'absurde.

Puisque t_0 est transitoire, il existe un point t_1 tel que $t_0 \ll t_1$ et tel que $t_1 \dashv t_0$. Par hypothèse, t_1 est transitoire et nous pouvons répéter l'opération avec t_1 . On construit ainsi une suite de points t_n dans E , qui ont la propriété suivante : pour tout $i \geq 0$, $t_i \ll t_{i+1}$ et $t_{i+1} \dashv t_i$. En utilisant la transitivité de la relation \ll , on en conclut aisément que les points t_i sont tous distincts, ce qui est en contradiction avec le fait que E est un ensemble fini.

Soit alors un point transitoire t et un point récurrent x tel que $t \ll x$. Choisissons alors une suite $(x_0 = t, x_1, \dots, x_n = x)$ telle que $x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$. Dans

cette suite, regardons le premier point récurrent x_k ($k \geq 1$). Alors, tous les points x_i avec $i \leq k - 1$ sont transitoires, et tous les autres sont récurrents, car on ne peut avoir $x < y$ avec $x \in \mathcal{R}$ et $y \in \mathcal{T}$. Donc, on a $x_{k-1} \in \mathcal{TR}$. C'est ce qu'on voulait démontrer. ■

La proposition suivante permet de définir les classes de récurrence :

Proposition 4.13. *Sur l'ensemble \mathcal{R} des points récurrents, la relation $x \ll y$ est une relation d'équivalence.*

Démonstration. — Nous savons déjà qu'elle est transitive. Par définition, elle est symétrique sur l'ensemble \mathcal{R} . Elle y est également réflexive puisque,

$$\forall x \in E, \exists y \in E, x \ll y.$$

■

Définition 4.14. *On appelle classe de récurrence les classes d'équivalence de \mathcal{R} pour cette relation d'équivalence.*

Nous dirons qu'une matrice markovienne est récurrente irréductible s'il n'y a pas de points transitoires et une seule classe de récurrence.

Par abus de langage, on dit aussi qu'une chaîne de Markov homogène est récurrente irréductible si sa matrice l'est.

Remarques

1. Une matrice markovienne est récurrente irréductible si et seulement si, pour tout couple de points (x, y) , on a $x \ll y$.
2. Si R est une classe de récurrence et $x \in R$, alors $P(x, y) = 0, \forall y \notin R$. Par conséquent, la matrice $P^R = (P^R(x, y))$ définie sur $R \times R$ comme la restriction de la matrice P est encore une matrice markovienne. Si f_R désigne la restriction de la fonction f à la classe R , alors

$$P^R(f_R) = P(f)_R.$$

La proposition suivante montre qu'une mesure invariante ne charge pas les points transitoires. Pour le démontrer, nous énonçons d'abord le lemme suivant :

Lemme 4.15. *Si μ est une mesure invariante et que $\mu(x) = 0$,*

$$y \ll x \implies \mu(y) = 0.$$

Démonstration. — Soit x tel que $\mu(x) = 0$. Il suffit bien évidemment de montrer le résultat lorsque $y > x$. La mesure μ étant invariante, on a

$$\mu(x) = \sum_y \mu(y)P(y, x) = 0.$$

C'est une somme de termes positifs, donc tous les termes sont nuls, ce qui veut dire que $\mu(y) = 0$ si $P(x, y) > 0$. C'est ce que nous voulions démontrer. ■

Proposition 4.16. *Soit μ une mesure invariante et $t \in \mathcal{T}$. Alors $\mu(t) = 0$.*

Démonstration. — Nous allons montrer que

$$\mu(\mathcal{T}) = \sum_{t \in \mathcal{T}} \mu(t) = 0.$$

Nous commençons par écrire que μ est invariante :

$$\forall x \in E, \mu(x) = \sum_{y \in E} \mu(y)P(y, x).$$

Sommons ensuite sur tous les éléments de x de \mathcal{T} : il vient

$$\mu(\mathcal{T}) = \sum_{y \in E} \mu(y) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(y, x).$$

Si $x \in \mathcal{T}$, alors $P(y, x) = 0$ si $y \notin \mathcal{T}$, et donc nous pouvons écrire

$$\mu(\mathcal{T}) = \sum_{y \in \mathcal{T}} \mu(y) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(y, x).$$

Remarquons d'abord que, pour tout $y \in \mathcal{T}$,

$$\mu(y) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(y, x) \leq \mu(y) \sum_{x \in E} P(y, x) = \mu(y).$$

Ensuite, supposons alors qu'il y ait un point $t \in \mathcal{T}$ tel que $\mu(t) > 0$. D'après les lemmes 4.16 et 4.12, il existe alors un point $t_0 \in \mathcal{TR}$ avec $\mu(t_0) > 0$. Mais, si $t_0 \in \mathcal{TR}$, alors

$$\sum_{x \in \mathcal{T}} P(t_0, x) < 1,$$

puisqu'il existe un point $x \in \mathcal{R}$ pour lequel $P(t_0, x) > 0$. On a donc

$$\mu(t_0) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(t_0, x) < \mu(t_0),$$

et au bout du compte

$$\sum_{y \in \mathcal{T}} \mu(y) \sum_{x \in \mathcal{T}} P(y, x) < \sum_{y \in \mathcal{T}} \mu(y),$$

d'où

$$\mu(\mathcal{T}) < \mu(\mathcal{T}),$$

ce qui est la contradiction cherchée. ■

Nous ouvons maintenant énoncer le principal résultat de cette section :

Théorème 4.17. *Soit P une matrice markovienne : la mesure invariante est unique si et seulement si il n'y a qu'une seule classe de récurrence.*

Démonstration. — Commençons par montrer que la condition est nécessaire : s'il y a plusieurs classes de récurrence, la restriction de la matrice P à chacune de ces classes est markovienne, et à chacune de ces classes R correspond au moins une mesure invariante μ_R . Ces mesures μ_R , qui sont aussi par extension des mesures sur E portées par R , sont des mesures invariantes pour la matrice P elle-même.

Pour la partie directe, puisque nous savons qu'une mesure invariante ne charge pas l'ensemble des points transitoires, nous pouvons nous restreindre au cas des chaînes récurrentes irréductibles (rappelons que ceci signifie sans points transitoires et unicité de la classe de récurrence). Il nous faut alors démontrer que l'espace propre associé à la matrice transposée tP pour la valeur propre 1 est de dimension 1. Or, les valeurs propres de P et tP sont les mêmes, et ont même ordre de multiplicité. Il nous suffit donc de démontrer que l'espace propre associé à P pour la valeur propre 1 est de dimension 1, c'est à dire que toute fonction f solution de $P(f) = f$ est constante.

Appelons une telle fonction une fonction invariante et choisissons une mesure invariante μ . Le lemme 4.15 nous montre que, si un point x est tel que $\mu(x) = 0$, alors il en va de même de tous les autres points $y \in E$, car $y \ll x$ puisque la chaîne est récurrente irréductible. Puisque μ est une probabilité, ceci est impossible et $\mu(x) > 0$ pour tous les points de E .

Pour toute fonction f , introduisons la quantité $\Gamma(f) = f^2 - 2fP(f) + P(f^2)$. Un simple calcul montre que

$$\Gamma(f)(x) = \sum_y P(x, y)(f(x) - f(y))^2 \geq 0.$$

D'autre part, on a aussi, puisque μ est invariante

$$\int \Gamma(f)(x) d\mu(x) = 2 \int f^2 - fP(f) d\mu = \int f(f - P(f)) d\mu.$$

Nous voyons donc que, si f est invariante, alors

$$\int \Gamma(f) d\mu = \sum_x \Gamma(f)(x)\mu(x) = 0,$$

d'où nous déduisons que, pour tout $x \in E$, $\Gamma(f)(x) = 0$, puisque $\Gamma(f) \geq 0$ et que $\mu(x) > 0$. Finalement, si nous revenons à l'expression de $\Gamma(f)(x)$, nous voyons que

$$P(x, y) > 0 \implies f(x) = f(y).$$

On en déduit que

$$y \ll x \implies f(x) = f(y),$$

et donc que f est constante si la chaîne est récurrente irréductible. ■

Remarques

1. La démonstration précédente nous a aussi appris que la mesure invariante de chaque classe de récurrence charge tous les points de la classe avec une mesure strictement positive, et qu'une fonction invariante est constante sur chaque classe de récurrence.
2. Une autre façon de voir qu'une fonction invariante est constante est de considérer un point x_0 où f atteint son maximum. Alors, en ce point,

$$f(x_0) = \sum_y P(x_0, y)f(y) \leq \sum_y P(x_0, y)f(x_0),$$

et donc

$$\sum_y P(x_0, y)(f(x_0) - f(y)) = 0,$$

ce qui montre que $P(x_0, y) \neq 0 \implies f(y) = f(x_0)$, et cette identité se propage partout pour démontrer que f est constante.

Corollaire 4.18. Soit P une matrice markovienne. Soit (R_1, \dots, R_k) ses classes de récurrence, et (μ_1, \dots, μ_k) les probabilités invariantes de ces classes. Alors, l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension k , toutes les probabilités invariantes s'écrivent

$$\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu_i.$$

S'il n'y a pas de points transitoires, toute les fonctions invariantes s'écrivent

$$f = \sum_{i=1}^k \theta_i \mathbf{1}_{R_i}.$$

Démonstration. — Commençons par la décomposition d'une mesure ν invariante, qui ne soit pas nécessairement une probabilité ni même une mesure positive, mais seulement une solution de $\nu P = \nu$. Appelons ν_i la restriction de ν à la classe R_i . Si P^i désigne la restriction de la matrice P à la classe R_i , qui est récurrente irréductible, alors $\nu_i P^i = \nu_i$, et donc $\nu_i = \alpha_i \mu_i$, avec $\alpha_i = \nu(R_i)$. Puisque nous savons que la restriction de ν à l'ensemble des points transitoires est nulle (proposition 4.4), alors nous obtenons la décomposition cherchée.

Ceci nous montre que l'espace propre associée à la valeur propre 1 pour ${}^t P$ est de dimension k . Comme par ailleurs, c'est aussi la dimension de l'espace propre associé à la valeur propre 1 pour P , et que les fonctions $\mathbf{1}_{R_i}, i = 1, \dots, k$ sont invariantes, cela nous donne la décomposition des fonctions invariantes. ■

Lorsqu'il y a des points transitoires, la valeur des fonctions invariantes sur ces points est un peu plus compliquée à déterminer. Sans entrer dans les détails, signalons que les fonctions invariantes sont engendrées par les fonctions f_i indexées par les classes de récurrence R_i et qui valent

$$f_i(x) = \mathbf{P}(T_{R_i} < \infty \mid X_0 = x),$$

où T_{R_i} désigne le temps d'atteinte de la classe R_i , c'est à dire

$$T_{R_i} = \inf\{n \mid X_n \in R_i\}.$$

Notons également un corollaire de l'unicité de la mesure invariante.

Corollaire 4.19. S'il n'y a qu'une seule classe de récurrence, et si μ est l'unique probabilité invariante, alors, pour toute probabilité μ_0 , la suite

$$\mu_n = (\mu_0 + \mu_0 P + \dots + \mu_0 P^{n-1})/n$$

converge vers μ .

Démonstration. — Nous avons vu plus dans la démonstration du théorème d'existence (théorème 4.5) que toute valeur d'adhérence de la suite ν_n est invariante. Si cette mesure invariante est unique, alors la suite ν_n , suite dans un compact, n'a qu'une valeur d'adhérence possible, et donc converge vers μ . ■

Le corollaire précédent s'énonce en disant que, quelle que soit la loi de X_0 , la moyenne des lois de (X_0, \dots, X_n) converge vers la mesure μ . Plus bas, nous démontrerons à l'aide la théorie des martingales le résultat plus fort de convergence presque sûre des mesures empiriques vers la mesure μ (section 4.5).

4.3 Cas des matrices sous-markoviennes.

Une matrice à coefficients positifs est toujours égale à une matrice sous-markovienne à un coefficient près. Pour une telle matrice, nous pouvons définir de même la notion de classe de récurrence. Soit alors P une matrice sous-markovienne, récurrente irréductible, et soit f est une solution positive ou nulle (mais non identiquement nulle) de $Pf = \lambda f$, avec $\lambda > 0$ (valeur propre donnée par le théorème de Perron-Frobenius). La démonstration faite plus haut montre que $f(x) > 0$ partout.

On peut alors considérer la matrice

$$Q(x, y) = \frac{1}{\lambda f(x)} P(x, y) f(y).$$

On a $Q(g) = \frac{1}{\lambda f} P(fg)$. Q est une matrice markovienne, récurrente irréductible. Nous avons $Pg = \lambda g$ si et seulement si $h = g/f$ vérifie $Qh = h$. Une telle fonction est donc constante, et g est proportionnelle à f : si la matrice P est récurrente irréductible, toute valeur propre strictement positive de P est simple.

Si $m = (m(x))$ est un vecteur propre de tP , de valeur propre λ , alors $\mu = mf = (m(x)f(x))$ est solution de $\mu Q = \mu$: la mesure invariante de Q est donc liée à la solution de $mP = m$ par la relation $\mu = cfm$, où c est une constante de normalisation.

4.4 Périodes, chaînes apériodiques.

Dans la section précédente, nous avons vu que si la chaîne est récurrente irréductible, alors la suite $(\mu_0 + \mu_0 P + \dots + \mu_0 P^{n-1})/n$ converge vers l'unique mesure μ invariante pour P . Nous nous préoccuons dans ce chapitre de la convergence de la loi de X_n elle même vers μ .

Dans cette section, nous ne traiterons que le cas des chaînes récurrentes irréductibles, c'est à dire sans points transitoires et n'ayant qu'une seule classe de récurrence, mais les notions introduites s'appliquent aux matrices markoviennes générales.

Un premier exemple élémentaire montre que le simple fait pour P d'être récurrente irréductible n'est pas suffisant. Considérons pour cela la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

matrice d'une chaîne de Markov sur deux points $\{1, 2\}$. On voit que, si la chaîne associée X_0 part du point $\{1\}$, c'est à dire si la loi de X_0 est $\delta_{\{1\}}$, alors la loi de X_{2p} est $\delta_{\{1\}}$ tandis que la loi de X_{2p+1} est $\delta_{\{2\}}$, et donc la loi de X_n ne converge pas vers l'unique mesure invariante qui est dans ce cas la mesure uniforme, la matrice P étant symétrique et récurrente irréductible.

Pour traiter ce problème de convergence, nous introduisons une nouvelle notion, la période.

Définition 4.20. Soit x un point de E , et $N(x) = \{n \mid P^n(x, x) > 0\}$. La période $p(x)$ de x est le plus grand diviseur commun (PGCD) de $N(x)$.

Remarquons tout d'abord que $N(x)$ est un semigroupe pour l'addition : si n et m sont des éléments de $N(x)$, alors $n + m$ est dans $N(x)$, puisque

$$P^{n+m}(x, x) = \sum_y P^n(x, y)P^m(y, x) \geq P^n(x, x)P^m(x, x).$$

D'autre part, ce PGCD est le diviseur d'un nombre fini de points de $N(x)$ (le PGCD d'une famille croissante est décroissant, donc constant à partir d'un certain rang).

Nous noterons dans cette section $p \mid q$ si p est un diviseur de q . Si nous notons $D(x)$ l'ensemble des diviseurs de $N(x)$, alors $p(x)$ est caractérisé par

$$p(x) \in D(x) ; \forall q \in D(x), p(x) \mid q.$$

La première remarque importante est la suivante :

Proposition 4.21. Dans une classe de récurrence, tous les points ont même période.

Démonstration. — Soient x et y deux points de E . Il suffit de démontrer que $p(x) \mid p(y)$, car alors par symétrie nous aurons l'égalité.

D'autre part, grâce à la caractérisation précédente, il suffit pour cela de démontrer que $p(x)$ est un diviseur de $N(y)$. Soit alors m un élément de $N(y)$ c'est à dire que $P^m(y, y) > 0$. Maintenant, x et y étant dans la même classe de récurrence, nous avons $x \ll y$ et $y \ll x$, c'est à dire qu'il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que

$$P^{n_1}(x, y) > 0 ; P^{n_2}(y, x) > 0.$$

Alors, $n_1 + n_2$ et $n_1 + n_2 + m$ appartiennent tous les deux à $N(x)$, puisque

$$P^{n_1+n_2}(x, x) = \sum_z P^{n_1}(x, z)P^{n_2}(z, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^{n_2}(y, x) > 0,$$

et d'autre part, pour les mêmes raisons,

$$P^{n_1+m+n_2}(x, x) \geq P^{n_1}(x, y)P^m(y, y)P^{n_2}(y, x) > 0.$$

Donc, $p(x) \mid n_1 + n_2$ et $p(x) \mid n_1 + n_2 + m$, et par différence $p(x) \mid m$. ■

Grâce à la proposition précédente, nous pouvons maintenant donner la définition d'apériodicité :

Définition 4.22. *On dira qu'une matrice markovienne récurrente irréductible est apériodique si la période d'un point quelconque de E est égale à 1.*

La proposition précédente montre alors immédiatement que

Corollaire 4.23. *Si une matrice markovienne P est récurrente irréductible et s'il existe un point x pour lequel $P(x, x) > 0$, alors elle est apériodique.*

Le corollaire précédent provient de ce que $1 \in N(x)$. La propriété fondamentale des matrices markoviennes récurrentes irréductibles apériodiques est la suivante :

Proposition 4.24. *Soit P une matrice markovienne récurrente irréductible et apériodique. Alors, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, et pour tous les couples (x, y) de E^2 , on ait $P^n(x, y) > 0$.*

Démonstration. —

Nous commençons par remarquer que, sous l'hypothèse d'apériodicité, il y a pour tout point x de E deux entiers consécutifs $n(x)$ et $n(x) + 1$ dans $N(x)$.

En effet, considérons des entiers n_1, \dots, n_k dans $N(x)$ dont le PGCD soit égal à 1. Alors, le théorème de Bezout affirme qu'il existe k entiers relatifs q_1, \dots, q_k tels que

$$\sum_i q_i n_i = 1.$$

En écrivant $q_i^+ = \sup(q_i, 0)$ et $q_i^- = \sup(-q_i, 0)$, nous avons

$$\sum_i q_i^+ n_i = 1 + \sum_i q_i^- n_i,$$

et on peut donc choisir $n = \sum_i q_i^- n_i$. (Rappelons que $N(x)$ est un semigroupe pour l'addition, et donc que la somme d'éléments de $N(x)$ est un élément de $N(x)$.)

Remarquons alors que, si $n \geq n(x)^2 - 1$, alors $n \in N(x)$. En effet, nous pouvons alors écrire la division euclidienne de n par $n(x)$, $n = pn(x) + r$, avec $r \leq n(x) - 1$. Dans ce cas, $p \geq r$ sinon $p < r(n(x) + 1) \leq n^2(x) - 1$. Nous pouvons alors écrire $p = r + q$, et donc $n = qn(x) + r(n(x) + 1)$, ce qui montre que $n \in N(x)$.

Nous avons donc mis en évidence pour tout $x \in E$ un entier $n'(x)$ tel que, pour tout $n \geq n'(x)$, alors $n \in N(x)$.

Choisissons maintenant pour tout couple (x, y) avec $x \neq y$ un entier $n(x, y)$ tel que $P^{n(x, y)} > 0$, ce qui est possible puisque la chaîne est récurrente irréductible. Appelons $M = \max\{n'(x), n(x, y), (x, y) \in E \times E\}$. Alors, pour $n \geq M$, $P^n(x, y) > 0$.

En effet, c'est clair si $x = y$ par définition de $n'(x)$, et, si $x \neq y$, alors $n = n(x, y) + p$, avec $p \geq n'(x)$, et donc

$$P^n(x, y) \geq P^n(x, y)P^p(x, x) > 0.$$

■

Avant de donner le résultat de convergence en loi de (X_n) vers μ , il nous reste à établir un lemme important. Rappelons que, si une matrice markovienne est récurrente irréductible et que μ désigne son unique mesure invariante, alors $\mu(x) > 0$, pour tous les points $x \in E$. Rappelons aussi que, si ν est une probabilité sur E , alors $(d\nu/d\mu)(x)$ désigne la densité $\nu(x)/\mu(x)$ de ν par rapport à μ .

Lemme 4.25. *Soit P une matrice markovienne récurrente irréductible et soit μ son unique probabilité invariante. Pour toute mesure de probabilité ν , notons*

$$\sigma(\nu) = \int_E ((d\nu/d\mu)(x) - 1)^2 d\mu(x).$$

Alors,

$$\sigma(\nu P) \leq \sigma(\nu).$$

De plus, s'il existe un $y \in E$ tel que, $\forall x \in E, P(x, y) > 0$, alors

$$\sigma(\nu P) = \sigma(\nu) \implies \nu = \mu.$$

Démonstration. — Tout d'abord, rappelons que, si Q désigne la matrice adjointe de P , c'est à dire $Q(x, y) = \mu(y)P(y, x)/\mu(x)$, alors Q est markovienne, de mesure invariante μ et $d(\nu P)/d\mu = Q(d\nu/d\mu)$ (cf 4.7). Appelons alors $f(x)$ la densité $\nu(x)/\mu(x)$. Nous avons

$$\sigma(\nu P) = \int_E (Q(f) - 1)^2 d\mu; \quad \sigma(f) = \int_E (f - 1)^2 d\mu.$$

Mais, Q étant markovienne, alors, pour tout x ,

$$(4.8) \quad (Qf - 1)^2(x) = \left(\sum_y Q(x, y)(f(y) - 1) \right)^2 \leq \sum_y Q(x, y)(f(y) - 1)^2,$$

et il n'y a égalité dans cette équation (pour un point x) que si $f - 1$ est constante presque partout pour la mesure $\nu_x(y) = Q(x, y)$. partout où $Q(x, y) \neq 0$. (C'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la mesure de probabilité $Q(x, \cdot)$). D'autre part, μ étant une mesure invariante pour Q , nous savons que

$$\int Q(f - 1)^2 d\mu = \int (f - 1)^2 d\mu.$$

L'inégalité du lemme s'ensuit immédiatement.

De plus, s'il y a égalité, alors $(Q(f - 1))^2$ et $Q(f - 1)^2$ ayant même intégrale sont égales partout (rappelons que la seconde est plus grande que la première), et donc il y a égalité partout dans 4.8. Puisqu'il existe un point x pour lequel la mesure $\nu_x(y) = Q(x, y)$ est non nulle partout, la fonction $f - 1$ est constante, et par suite est nulle puisque f est une densité de loi de probabilité. Cette condition est réalisée dès que P a une de ses colonnes qui ne s'annule pas (puisque les 0 des colonnes de P s'échangent avec les 0 des lignes de Q). ■

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat fondamental de cette section :

Théorème 4.26. *Soit P une matrice markovienne récurrente irréductible. Alors, pour toute probabilité initiale μ_0 , la suite $\mu_0 P^n$ converge vers la probabilité invariante μ si et seulement si la matrice P est apériodique.*

Rappelons que, si X_n est une chaîne de Markov homogène de matrice P , et si μ_0 est la loi de X_0 , alors $\mu_0 P^n$ est la loi de X_n .

Démonstration. — Commençons par remarquer que la condition d'apériodicité est nécessaire. En effet, si T est la période et que $T > 1$, et si μ_0 est la masse de Dirac en un point x , alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}(X_{kT+1} = x) = 0$, et donc $\mu_0 P^{kT+1}(x) = 0$, alors que $\mu(x) > 0$. Il n'y a donc pas convergence vers $\mu(x)$. Rappelons qu'il y a convergence des moyennes de Césaro vers x , et donc la suite $\mu_0 P^n(x)$ ne converge pas.

Pour démontrer l'inverse, choisissons une probabilité μ_0 et appelons μ la probabilité invariante. Appelons μ_n la suite $\mu_n = \mu_0 P^n$, et σ_n la quantité $\sigma(\mu_n)$ définie dans le lemme 4.25. Alors, ce lemme nous dit que la suite $\sigma_n = \sigma(\mu_n) = \sigma(\mu_{n-1}P)$ est décroissante. Appelons σ sa limite.

Pour montrer la convergence de μ_n vers μ , il suffit de montrer que toute sous-suite convergente admet μ comme limite. (N'oublions pas que l'ensemble des lois de probabilité sur un ensemble fini est compact). Soit alors μ_{n_k} une sous suite de limite ν . La quantité $\sigma(\nu)$ étant clairement une fonction continue de ν , nous voyons que $\sigma(\nu) = \lim_k \sigma(\mu_{n_k}) = \sigma$. Mais, de la même manière, pour tout m fixé dans \mathbb{N} , $\sigma(\nu P^m) = \lim(\sigma(\mu_{n_k+m})) = \sigma$.

Nous voyons donc que $\sigma(\nu P^m) = \sigma(\nu)$, et ceci pour tout m . Mais nous savons aussi d'après la proposition 4.24 qu'il existe un entier m tel que P^m ait tous ses coefficients positifs. Comme par ailleurs P^m admet μ comme unique probabilité invariante, nous sommes dans le cas d'égalité du lemme 4.25, nous en déduisons que $\nu = \mu$.

■

Corollaire 4.27. *Si une matrice P est récurrente irréductible apériodique, et si μ désigne l'unique mesure invariante, alors, pour toute fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$, $P^n(f)$ converge vers $\int f d\mu$ lorsque $n \rightarrow \infty$.*

Enfin, nous clôturons ce chapitre par une caractérisation des valeurs propres de module 1 de la matrice P en termes de la période de P .

Théorème 4.28. *Soit P une matrice markovienne récurrente irréductible. Alors, toutes les valeurs propres de P sont des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1. Les valeurs propres de module 1 sont exactement les nombres de la forme $\exp(2i\pi k/T)$, où T est la période, et $k = 0, \dots, T-1$. En particulier, la chaîne est apériodique si, et seulement si, 1 est la seule valeur propre de module 1.*

Démonstration. — Commençons par montrer que toutes les valeurs propres ont un module égal à 1 au maximum.

Tout d'abord, remarquons que si M est une matrice markovienne et f une fonction définie sur E à valeurs complexe,

$$(M(|f|^2) - fM(\bar{f}) - \bar{f}M(f) + |f|^2)(x) = \sum_y M(x, y)|f(y) - f(x)|^2 \geq 0,$$

et par conséquent, si μ est une mesure invariante pour M , alors

$$2 \int |f|^2 d\mu \geq \int fM(\bar{f}) + \bar{f}M(f) d\mu.$$

Maintenant, considérons une matrice markovienne P récurrente irréductible, sa mesure invariante μ et sa matrice adjointe Q définie par

$$Q(x, y) = \mu(y)P(y, x)/\mu(x).$$

La mesure μ est invariante pour la matrice markovienne $M = QP$, et, si f est un vecteur propre (complexe) de P de valeur propre complexe λ , nous avons

$$\int fM(\bar{f}) d\mu = \int \bar{f}M(f) d\mu = \int P(f)P(\bar{f}) d\mu = |\lambda|^2 \int |f|^2 d\mu.$$

On en déduit donc que

$$\int |f|^2 d\mu \geq |\lambda|^2 \int |f|^2 d\mu,$$

d'où le résultat, si l'on se souvient que pour tout x , $\mu(x) > 0$, et donc qu'une fonction f non nulle est telle que $\int |f|^2 d\mu > 0$.

Remarquons également que, si $\lambda = \exp(i\theta)$ est une valeur propre de module 1, et si f est un vecteur propre, alors $P^n(f) = \exp(in\theta)f$, et donc ne peut converger que si $\lambda = 1$. Cela montre qu'une matrice markovienne récurrente irréductible apériodique n'a pas d'autres valeurs propres de module 1 autres que 1.

Il en va de même si la matrice n'a pas de point transitoires, et que toutes les classes de récurrence sont apériodiques.

Considérons maintenant une matrice P récurrente irréductible de période $T > 1$. Choisissons un point x de E , et, pour $i = 0, \dots, T-1$, appelons R_i la classe suivante

$$R_i = \{y \in E \mid \exists k \in \mathbb{N}, P^{kT+i}(x, y) > 0\}.$$

T étant la période, il n'est pas difficile de voir qu'on peut également décrire R_i comme

$$R_i = \{y \in E \mid \exists k \in \mathbb{N}, P^{kT-i}(y, x) > 0\}.$$

La matrice P étant récurrente irréductible, elles recouvrent l'ensemble E . On voit aisément que les classes R_i sont disjointes : elles forment une partition de E et ce sont exactement les classes de récurrence de P^T . De plus, par définition même de la période de P , on voit également que ces classes sont apériodiques pour la matrice markovienne P^T .

La matrice P^T n'a donc pas de points transitoires et toutes ses classes de récurrence sont apériodiques. Elle n'a donc pas de valeurs propres de module 1 autre que 1, et, si λ est valeur propre de T , λ^T est valeur propre de P^T . On voit donc ainsi que les seules valeurs propres de module 1 de P sont de la forme $\exp(2i\pi k/T)$.

Réciproquement, on voit directement sur la définition de R_i que $P(\mathbf{1}_{R_i}) = \mathbf{1}_{R_{i-1}}$, $P(\mathbf{1}_{R_0}) = \mathbf{1}_{R_{T-1}}$, (on ne peut passer que de R_i à R_{i+1} par une transition de la chaîne) et donc que la fonction

$$f_k = \sum_{q=0}^{T-1} \exp(2iqk\pi/T) \mathbf{1}_{R_q}$$

est un vecteur propre de P de valeur propre $\exp(2ik\pi/T)$. C'est ce que nous voulions démontrer. ■

Enfin, considérons le cas des matrices à coefficients positifs générales. On a

Proposition 4.29. *Soit P une matrice à coefficients positifs, récurrente irréductible. Soit $\lambda > 0$ pour lequel il existe une fonction propre f positive ($Pf = \lambda f$). Alors, toutes les autres valeurs propres μ de P sont telles que $|\mu| \leq \lambda$. En particulier, λ est unique, et c'est une valeur propre simple.*

Démonstration. — Nous avons déjà vu que λ est une valeur propre simple, et aussi que dans ces conditions, la fonction f est strictement positive partout. On considère alors la matrice markovienne donnée par $Q(h) = \frac{1}{\lambda f} P(hf)$. Puisque c'est une matrice markovienne, toutes ses valeurs propres sont de module inférieur ou égal à 1 (et même strictement inférieur pour peu que la matrice soit apériodique). Alors, si g est un vecteur propre de P , de valeur propre μ , (éventuellement complexe), on sait que g/f est un vecteur propre de Q , de valeur propre μ/λ . D'où le résultat. ■

Remarque. — Soit (X_n) une chaîne de Markov sur E , de matrice P , et soit A est sous-ensemble de E . Le processus (X_n) conditionné à rester dans A est encore

une chaîne de Markov. Sa matrice de transition est construite ainsi : si P_1 est la restriction de la matrice markovienne P à $A \times A$, la matrice markovienne Q ainsi construite par le procédé précédent est la matrice markovienne de cette chaîne conditionnée. (Ce conditionnement est un peu délicat dans la mesure ici où nous conditionnons par rapport à un événement de mesure nulle.)

4.5 Théorème ergodique et théorème de la limite centrale.

Dans cette section, nous présentons les résultats de convergence presque sûre (théorème ergodique) et de convergence en loi (théorème central limite) pour les chaînes de Markov. Ce sont les conséquences immédiates des résultats équivalents pour les martingales (propositions 2.37 et 2.41).

Nous aurons besoin du lemme suivant

Lemme 4.30. *Soit P une matrice markovienne irréductible de mesure invariante μ . Soit f une fonction de moyenne nulle pour μ . Il existe une unique fonction g de moyenne nulle pour μ , telle que $(P - I)g = f$. De plus, si (X_n) est une chaîne de Markov de matrice P , et f est une fonction de moyenne nulle pour μ , la suite*

$$M_n = g(X_n) - \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$$

est une martingale pour la filtration naturelle $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ de la suite (X_n) .

Démonstration. — Puisque la matrice P est irréductible, les seules fonctions telles que $P(f) = f$ sont constantes. D'autre part, si F_0 désigne l'espace vectoriel (de dimension finie) des fonctions définies sur E et de moyenne nulle pour μ , alors l'opérateur linéaire P envoie F_0 dans lui-même (car μ est invariante par définition). Finalement, nous voyons que 1 n'est pas valeur propre de P sur F_0 , puisqu'une fonction invariante par P est constante et donc nulle.

Si f est de moyenne nulle, il existe donc une (unique) fonction g de moyenne nulle telle que $(P - I)g = f$.

La suite de variables aléatoires $M_n = g(X_n) - f(X_0) - \dots - f(X_{n-1})$ est une martingale, pour la filtration naturelle \mathcal{F}_n associée à (X_n) . En effet,

$$\mathbf{E}(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = P(g)(X_n) - f(X_0) - \dots - f(X_n) = M_n,$$

puisque $P(g) = g + f$.

■

Nous commençons par le théorème ergodique.

Proposition 4.31. *Soit (X_n) une chaîne de Markov définie sur un espace fini E , homogène, irréductible. Soit μ son unique probabilité invariante. Alors, quelle que soit la loi de X_0 , et quelle que soit la fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{n+1}(f(X_0) + \cdots + f(X_n))$$

converge presque sûrement vers $\int_E f(x) \mu(dx)$.

Ceci s'énonce encore sous la forme : si $\nu(\omega, dx)$ désigne la mesure empirique $(\delta_{X_0} + \cdots + \delta_{X_{n-1}})/n$, alors cette mesure converge presque sûrement vers la mesure invariante μ .

Démonstration. — Nous nous ramenons au cas où $\int f d\mu = 0$. Soit P la matrice de transition de la chaîne X_n , que nous identifions comme d'habitude à l'opérateur linéaire agissant sur les fonctions $P(f)(x) = \mathbf{E}[f(X_1) \mid X_0 = x]$, et considérons la fonction g de moyenne nulle telle que $(P - I)(g) = f$, donnée par le lemme 4.30. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{E}((M_{n+1} - M_n)^2 \mid \mathcal{F}_n) &= \mathbf{E}[(g(X_{n+1}) - (g + f)(X_n))^2 \mid \mathcal{F}_n] \\ &= P(g^2)(X_n) + (g + f)^2(X_n) - 2(g + f)X_n P(g + f)(X_n) \\ &= P(g^2)(X_n) + (g + f)^2(X_n) - 2(g + f)X_n P(g + f)(X_n) \\ &= [P(g^2) - P(g)^2](X_n) \end{aligned}$$

C'est donc une variable uniformément bornée (par $2 \sup |g|^2$).

On peut alors appliquer la proposition 2.37 pour obtenir la convergence vers 0 de M_n/n , et par suite de $(f(X_1) + \cdots + f(X_n))/n$.

La formulation en terme de mesure empirique provient de l'application de ce résultat à l'ensemble des fonctions $\mathbf{1}_x$. ■

Enfin, la même méthode nous donne le résultat de convergence en loi des chaînes de Markov.

Proposition 4.32. *Soit (X_n) une chaîne de Markov récurrente irréductible sur l'ensemble fini E , de matrice de transition P , de mesure invariante μ . Soit f une fonction d'intégrale nulle pour la mesure invariante et g la fonction donnée de moyenne nulle pour μ donnée par le lemme 4.30. Si*

$$\sigma^2 = \int g^2 - P(g)^2 d\mu,$$

alors la suite $(f(X_0) + \dots + f(X_{n-1}))/\sqrt{n}$ converge en loi vers une loi gaussienne $N(0, \sigma^2)$.

Démonstration. — Introduisons comme plus haut la martingale

$$M_n = -g(X_n) + \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k).$$

Posons $\Delta_n = M_{n+1} - M_n$ et $\Sigma_n = \mathbf{E}(\Delta_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1})$, et $\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \Sigma_k$. Nous voyons que

$$\Delta_n = f(X_{n-1}) + g(X_{n-1}) - g(X_n),$$

et que $\Sigma_n = K(X_{n-1})$, avec

$$K = (f + g)^2 - 2(f + g)P(g) + P(g^2) = P(g^2) - P(g)^2.$$

Nous voyons d'abord que le théorème ergodique 4.31 pour voir que $\langle M \rangle_n/n$ converge presque sûrement vers $\int K(x) d\mu(x) = \sigma^2$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème central limite pour les martingales 2.41 pour obtenir la convergence en loi de M_n/\sqrt{n} vers une gaussienne $N(0, \sigma^2)$. Ensuite, il ne reste plus à remarquer que les quantités M_n/\sqrt{n} et $(f(X_0) + \dots + f(X_{n-1}))/\sqrt{n}$ ne diffèrent que par une quantité qui converge vers 0, uniformément (mais la convergence en probabilité serait suffisante ici), pour obtenir le résultat. ■

5 La propriété de Markov forte

Dans ce qui suit, nous considérerons toujours une chaîne de Markov homogène (X_n) , de noyau de transition P (fixé une fois pour toute), et de mesure initiale ν (qui pourra varier). Il n'est pas nécessaire dans cette section de supposer que l'espace E est fini ou dénombrable.

Désormais, nous considérerons que la chaîne (X_n) est réalisée sur **l'espace canonique** $\Omega = E^{\mathbb{N}}$ des suites (ω_n) à valeurs dans E . Nous dénoterons par \mathcal{F}_n la filtration naturelle de la suite $X_n(\omega)$: une fonction \mathcal{F}_n mesurable est une fonction qui ne dépend que des n premières coordonnées de la suite ω . La loi de la chaîne sera notée \mathbf{P}_ν et \mathbf{P}_x si $\nu = \delta_x$.

Nous définissons alors

$$\theta(\omega) = \theta((\omega_n)) = (\omega_{n+1});$$

en d'autres termes, $X_n(\theta(\omega)) = X_{n+1}(\omega)$.

Cet opérateur est appelé l'opérateur de translation sur Ω . C'est une application mesurable de Ω dans lui-même. Si Z est une variable aléatoire définie sur Ω , nous posons

$$\theta Z(\omega) = Z(\theta(\omega)),$$

et de même, si A est une partie mesurable de Ω , alors $\theta A = \theta^{-1}(A)$, pour avoir

$$\theta \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_{\theta A}.$$

Donnons quelques exemples :

1. Si $Z = F(X_0, X_1, \dots, X_n)$, $\theta Z = F(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$;
2. Si $T(\omega) = \inf\{n \geq 0 \mid X_n(\omega) \in A\}$, alors $\theta T = \inf\{n \geq 1 \mid X_n \in A\} - 1$.
En particulier $1 + \theta T = T$ sur $\{T \geq 1\}$.
3. Toujours avec $T = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}$, $\{T = \infty\} = \{X_0 \notin A\} \cap \theta\{T = \infty\}$.

De même, nous poserons $\theta_2 = \theta \circ \theta$, et $\theta_n = \theta \circ \theta_{n-1}$ désigne la n ème composition de θ avec lui-même, c'est à dire la translation de n -indices dans la suite (ω_i) .

Si T est un temps d'arrêt fini presque sûrement, nous noterons θ_T l'opérateur

$$\theta_T = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n \mathbf{1}_{T=n}.$$

Si T peut prendre la valeur $T = \infty$ avec une probabilité positive, l'opérateur θ_T ne sera défini que sur l'événement $\{T < \infty\}$.

Par exemple, si $T = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in A\}$, alors $\theta_T(T) = 0$. Par contre, si $T = \inf\{n > 0 \mid X_n \in A\}$ est le premier temps de retour dans A , alors $T + \theta_T(T)$ est le second temps de retour dans A .

Rappelons que nous avons désigné par $\mathbf{E}_x(Z)$ l'espérance d'une variable Z (bornée ou positive), lorsque la chaîne de Markov a comme mesure initiale δ_x .

Théorème 5.1. Propriété de Markov forte. *Soit Z une variable \mathcal{A} -mesurable bornée ou positive.*

1. $\mathbf{E}(\theta_n Z / F_n) = \mathbf{E}_{X_n}(Z)$.

2. Soit T un temps d'arrêt. Alors

$$\mathbf{E}(\theta_T Z / \mathcal{F}_T) \mathbf{1}_{T < \infty} = \mathbf{E}_{X_T}(Z) \mathbf{1}_{T < \infty}.$$

Démonstration. — Commençons par le premier point. Comme d'habitude, il suffit de démontrer la formule pour une famille de fonctions Z mesurables et bornées engendrant la tribu \mathcal{A} et stable par multiplication. Nous choisissons pour cela les fonctions qui ne dépendent que d'un nombre fini de coordonnées : $Z = F(X_0, \dots, X_p)$. Alors, $\theta_n Z = F(X_n, \dots, X_{n+p})$. Tout d'abord, par la propriété de Markov, $\mathbf{E}(\theta_n Z / \mathcal{F}_n) = \mathbf{E}(\theta_n Z / X_n)$, car $\theta_n Z$ est une fonction de (X_n, \dots, X_{n+p}) . Soit $\mu_n(dx)$ la loi de X_n . La loi du n -uplet (X_n, \dots, X_{n+p}) est

$$\mu_n(dx_n) P(x_n, dx_{n+1}) \cdots P(x_{n+p-1}, dx_{n+p}).$$

La loi conditionnelle de (X_n, \dots, X_{n+p}) sachant $X_n = x_n$ est donc

$$P(x_n, dx_{n+1}) \cdots P(x_{n+p-1}, dx_{n+p}) :$$

c'est la loi de (X_0, \dots, X_p) lorsque $X_0 = x_n$. Et donc

$$\mathbf{E}(\theta Z / X_n = x_n) = \mathbf{E}_{x_n}(F(X_0, \dots, X_p)) = \mathbf{E}_{x_n}(Z).$$

C'est ce que nous voulions démontrer.

Pour le second point, considérons un événement A de \mathcal{F}_T . Il s'agit de démontrer que

$$\mathbf{E}(\theta_T Z \mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T < \infty}) = \mathbf{E}(\mathbf{1}_A \mathbf{1}_{T < \infty} \mathbf{E}_{X_T}(Z)).$$

Le premier membre s'écrit

$$\sum_n \mathbf{E}(\theta_n Z \mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}}) = \sum_n \mathbf{E}(\mathbf{E}_{X_n}(Z) \mathbf{1}_{A \cap \{T=n\}}),$$

en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à \mathcal{F}_n , ce qui est licite car $A \cap \{T = n\} \in \mathcal{F}_n$. En regroupant les termes, on obtient exactement l'expression cherchée. ■

Remarques

1. On peut enlever la condition $\{T < \infty\}$ à condition d'ajouter à l'espace E un point δ , appelé **point cimetière** ou **poubelle**, où on envoie les trajectoires de la chaîne lorsqu'elle ne nous sert plus : formellement, on pose $P(\delta, \delta) = 1$, si bien qu'une fois arrivée en δ , la chaîne de Markov n'en bouge plus, et on

pose alors $X_T = \delta$ sur $\{T = \infty\}$. On définit $\theta_\infty Z$ de la même manière, en définissant de manière arbitraire la valeur de $Z(\omega)$ sur la trajectoire constante égale à δ (on choisit la plupart du temps la valeur 0, si aucune autre valeur n'est naturelle). La propriété de Markov forte s'énonce alors

$$\mathbf{E}(\theta_T Z / \mathcal{F}_T) = \mathbf{E}_{X_T}(Z).$$

S'il en est besoin, on désignera l'espace canonique des trajectoires à valeurs dans $E \cup \{\delta\}$ par $\hat{\Omega}$.

2. La raison pour laquelle nous nous restreignons à l'espace canonique est qu'on a une définition claire de ce qu'est l'opérateur θ . Si on n'avait pas pris cette précaution, il n'aurait été défini que sur la tribu engendrée par la suite de variables (X_n) , à partir de la formule $\theta X_n = X_{n+1}$.

5.1 Temps de retour.

Nous allons appliquer les identités qui précèdent pour obtenir des informations sur les temps de passage en un point, ou les temps d'atteinte des ensembles.

Proposition 5.2. *Soit (X_n) une chaîne de Markov homogène sur un ensemble fini E , et soit $x \in E$. Soit $T_x = \inf\{n > 0 \mid X_n = x\}$. (T_x est le temps de retour au point x , si $X_0 = x$.)*

Alors, si x est récurrent, $\mathbf{P}_y(T_x < \infty) = 1$, pour tous les points de la classe de récurrence de x . Si x est transitoire, $\mathbf{P}_x(T_x < \infty) < 1$.

Démonstration. — Le cas des points transitoires est facile, et ne nécessite pas ce qui précède. Si x est transitoire, il existe un point récurrent, un entier n , tel que $\mathbf{P}_x(T_x > n; X_n = y) > 0$. (Il existe une probabilité positive d'aller vers un point récurrent sans repasser par le point x). Sur l'événement $\{T_x > n; X_n = y\}$, on a $T_x = \infty$.

Pour les points récurrents, c'est plus délicat. Introduisons

$$S_x = \inf\{n \geq 0 \mid X_n = x\},$$

de telle façon que si $X_0 = y$, $S_x = T_x$ si $n \neq y$, mais que $S_x = 0$ si $y = x$. (S_x est le temps d'atteinte de x , qui n'est pas le même que le temps de retour si la chaîne part de x .)

On fixe x et on considère la fonction $F(y) = \mathbf{P}_y(S_x < \infty)$. On a $F(y) \leq 1$ et $F(x) = 1$. De plus, si $y \neq x$, alors

$$\{S_x = \infty\} = \{X_1 \neq x\} \cup \theta\{S_x = \infty\}.$$

D'où l'on tire, pour $y \neq x$,

$$\begin{aligned} 1 - F(y) &= \mathbf{E}_y[\mathbf{1}_{X_1 \neq x} \mathbf{E}(\theta \mathbf{1}_{S_x = \infty} / \mathcal{F}_1)] \\ &= \mathbf{E}_y[\mathbf{1}_{X_1 \neq x} \mathbf{E}_{X_1}(\mathbf{1}_{S_x = \infty})] \\ &= \mathbf{E}_y[\mathbf{1}_{X_1 \neq x} (1 - F(X_1))] \\ &= \mathbf{E}_y[1 - F(X_1)] \end{aligned}$$

On a donc $F(y) = \mathbf{E}_y(F(X_1))$, si $y \neq x$, ou encore $F(y) = PF(y)$ si $y \neq x$. Si $y = x$, on a $PF(x) \leq P\mathbf{1} = 1 = F(x)$. Donc partout $PF \leq F$. Plaçons nous sur une classe de récurrence, et introduisons la mesure invariante μ de cette classe. Nous savons qu'elle charge tous les points, et que $\int PF d\mu = \int F d\mu$. Donc, $F = PF$ partout sur la classe de récurrence, et puisque les fonctions invariantes sont constantes sur les classes de récurrence, $F(y) = F(x) = 1$.

Nous avons donc que, sur une classe de récurrence, le temps d'atteinte de tous les points est fini presque sûrement. C'est donc aussi le cas du temps de retour au point x . ■

Nous pouvons de même étudier les probabilités d'atteinte de toutes les parties de E :

Définition 5.3. Soit B une partie de E , et posons $T_B = \inf\{n \geq 0 \mid X_n \in B\}$. On appelle potentiel d'équilibre de B , et on note $V_B(x)$, la fonction $\mathbf{P}_x(T_B < \infty)$.

Proposition 5.4. $V_B = 1$ sur B ; $PV_B = V_B$ sur B^c .

Si B est une classe de récurrence, $PV_B = V_B$ partout, et V_B est nulle sur les autres classes de récurrence.

Toutes les fonctions solutions de $PF = F$ sont combinaisons linéaires des fonctions V_R , lorsque R parcourt l'ensemble des classes de récurrence.

Démonstration. — On fait même démonstration que pour les temps d'atteinte des points :

$$\{T_B = \infty\} = \{X_1 \notin B\} \cap \theta\{T_B = \infty\},$$

puis on calcule.

Le cas des classes de récurrence est spécial puisqu'alors, si une fonction V vaut 1 sur une classe R , on a $PV = 1$ sur R . S'il y a k classes de récurrence, nous obtenons donc ainsi k fonctions sur E linéairement indépendantes qui sont solutions de $PV = V$. Comme l'espace des fonctions invariantes est exactement de dimension k , nous avons ainsi toutes les fonctions invariantes. ■

Les fonctions V_B peuvent être définies directement comme solution de certaines équations:

Proposition 5.5. *La fonction V_B est la plus petite fonction positive satisfaisant $PV \leq V$, avec $V = 1$ sur B .*

Démonstration. — Comme la fonction V_B est positive et majorée par 1, nous voyons que $PV_B \leq V_B$, partout.

Soit alors une autre solution positive de $PV \leq V$, avec $V = 1$ sur B . La suite $V(X_n)$ est une surmartingale positive. Appliquons le théorème d'arrêt au temps $T_B \wedge n$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} V(x) &\geq \mathbf{E}[V(X_{T_B \wedge n})] \\ &\geq \mathbf{E}[V(X_{T_B}) \mathbf{1}_{T_B \leq n}] \\ &= \mathbf{P}(T_B \leq n). \end{aligned}$$

En faisant converger n vers l'infini, nous voyons que $V(x) \geq V_B(x)$. ■

Remarque. — Rappelons qu'une sous-martingale positive est bornée dans L^1 (ici c'est automatique puisque l'ensemble est fini et toutes les fonctions sont bornées), et donc cette suite $V(X_n)$ doit converger. D'après ce qu'on a vu du comportement de la suite X_n , elle finit par arriver dans une classe de récurrence et y tourne ensuite indéfiniment. La suite $V(X_n)$ ne peut donc converger que si la fonction V est constante sur les classes de récurrence. (Mais nous l'avions déjà vu par un autre argument faisant intervenir la mesure invariante.)

Nous allons maintenant nous intéresser à la loi du temps de retour $T_x = \inf\{n > 0 | X_n = x\}$, lorsque $X_0 = x$. On a

Théorème 5.6. *Soit P la matrice de la chaîne X et soit $\lambda > 0$. On pose $G_\lambda(x) = \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda n} P^n(x, x)$. Alors*

$$\mathbf{E}_x(e^{-\lambda T_x}) = \frac{G_\lambda(x)}{1 + G_\lambda(x)}.$$

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que puisque P^n est une matrice markovienne, alors tous ses termes sont dominés par 1, et la série qui définit la fonction G_λ est convergente. Ensuite, nous posons

$$Z_x = \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda n} \mathbf{1}_{X_n = x},$$

de telle sorte que $G_\lambda(x) = \mathbf{E}_x(Z_x)$.

On a, en décomposant la somme en le premier passage en x et les autres temps,

$$Z_x = e^{-\lambda T_x} [1 + \sum_{n \geq 1} e^{-\lambda(n+T_x)} \mathbf{1}_{X_{n+T_x} = x}],$$

ce qui s'écrit

$$Z_x = e^{-\lambda T_x} [1 + \theta_{T_x} Z_x].$$

Remarquons que tout est nul $\{T_x = \infty\}$, et nous pouvons intégrer : il vient

$$\mathbf{E}_x(Z_x) = \mathbf{E}[e^{-\lambda T_x} \mathbf{E}(1 + \theta_{T_x} Z_x) / \mathcal{F}_{T_x}] = \mathbf{E}[e^{-\lambda T_x} (1 + \mathbf{E}_{X_{T_x}}(Z_x))].$$

Mais $X_{T_x} = x$ sur $\{T_x < \infty\}$, et donc

$$G_\lambda(x) = \mathbf{E}[e^{-\lambda T_x} (1 + \mathbf{E}_x(Z_x))] = \mathbf{E}[e^{-\lambda T_x} (1 + G_\lambda(x))].$$

D'où finalement

$$G_\lambda(x) = \mathbf{E}[e^{-\lambda T_x}] (1 + G_\lambda(x)).$$

C'est ce que nous voulions démontrer. ■

Corollaire 5.7. Posons $G(x) = \sum_{n \geq 1} P^n(x, x)$. La fonction G est l'espérance du temps total passé en x à partir du temps 1, lorsque $X_0 = x$. Alors

$$\mathbf{P}_x(T_x < \infty) < 1 \iff G(x) < \infty.$$

De plus, si $G(x) < \infty$, alors $\mathbf{P}_x(T_x < \infty) = G(x) / [1 + G(x)]$.

Démonstration. — Le fait que $G(x)$ soit l'espérance du temps total passé en x provient directement de la définition.

Ensuite, il suffit de faire converger λ vers 0 dans le théorème précédent. $G_\lambda(x)$ converge vers $G(x)$ par convergence monotone, et $\mathbf{E}(e^{-\lambda T_x})$ converge vers $\mathbf{P}(T_x < \infty)$ par convergence dominée. ■

Corollaire 5.8. *Si un point x est transitoire, alors le nombre total de passages en x est presque sûrement fini. $G(x)$ est fini si et seulement si le point x est transitoire.*

On verra plus bas que ce nombre de passages en x suit en fait une loi géométrique. En regardant d'un peu plus près le théorème de convergence vers la mesure invariante dans le cas périodique, on pourrait voir directement que $G(x)$ est infini pour un point récurrent.

Remarque. — La fonction $G_\lambda(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\lambda n) P^n(x, y)$ s'appelle le **λ -potentiel** de la chaîne (ici $\lambda > 0$). En tant que matrice, elle vérifie

$$e^{-\lambda} P G_\lambda = e^{-\lambda} G_\lambda P = G_\lambda - Id.$$

En d'autres termes, si f est une fonction $E \mapsto \mathbb{R}$, alors

$$G_\lambda(f)(x) = \sum_y G_\lambda(x, y) f(y)$$

est la solution de $G_\lambda(f) = e^{-\lambda} P(G_\lambda(f)) + f$.

Pour le voir, il suffit de remarquer que la série $\sum_n e^{-\lambda n} P^n$ est convergente (pour n'importe quelle topologie raisonnable sur l'espace des matrices, par exemple avec la norme $\|M\| = \sup_{x,y} |M(x, y)|$). Sa somme Q est solution de $(Id - e^{-\lambda} P)Q = Id$.

Une autre conséquence de la propriété de Markov forte est l'extension de la propriété de Markov à un temps d'arrêt.

Théorème 5.9. *Soit T un temps d'arrêt fini. Considérons la suite $Y_n = X_{n+T}$. Posons $\mathcal{G}_T = \sigma(Y_n, n \geq 0)$ et appelons μ_T la loi de X_T . Alors Y_n est une chaîne de Markov de même matrice de transition que X , et de loi initiale μ_T . De plus*

$$\mathcal{F}_T \perp_{X_T} \mathcal{G}_T.$$

En d'autres termes, la suite X_n repart après le temps T en oubliant le passé, avec la même structure markovienne.

Si le temps T est infini avec probabilité positive, la propriété reste vraie si nous supposons l'existence d'un point cimetière δ et si nous posons $X_\infty = \delta$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que, pour toute fonction U de la forme $F(Y_0, \dots, Y_n)$, $\mathbf{E}(U/\mathcal{F}_T)$ est une fonction de X_T et que

$$\mathbf{E}(U) = \mathbf{E}_{\mu_T}(F(X_0, \dots, X_n)).$$

Posons $Z = F(X_0, \dots, X_n)$: on a $U = \theta_T Z$, et donc

$$\mathbf{E}(U/\mathcal{F}_T) = \mathbf{E}_{X_T}(Z); \quad \mathbf{E}(\mathbf{E}_{X_T}(Z)) = \mathbf{E}_{\mu_T}(Z).$$

On obtient donc le résultat annoncé. ■

Un cas particulier important est celui où X_T est constant.

Corollaire 5.10. *Si T est un temps d'arrêt fini presque sûrement tel que la variable X_T soit constante et égale à x , alors \mathcal{F}_T est indépendante de \mathcal{G}_T , et la chaîne Y_n suit la loi \mathbf{P}_x .*

C'est le cas du premier temps de passage en x si celui-ci est fini presque sûrement.

A l'aide de ce que nous savons, et de cette propriété, nous pouvons donc résumer le comportement de la chaîne de Markov:

Proposition 5.11. *Soit X_n de Markov sur une ensemble fini E , partant d'un point initial fixé x .*

1. *Si x est récurrent, la chaîne dans la classe de récurrence de x , et y visite une infinité de fois chaque point.*
2. *Si x est transitoire, la chaîne quitte l'ensemble des transitoires à partir d'un certain temps, et une fois arrivée dans une classe de récurrence, y reste indéfiniment en visitant une infinité de fois chaque point de cette classe.*

Démonstration. — Il n'y a rien ou presque à démontrer. Nous avons vu que si x est récurrent, le nombre de passages en x est infini, et que partant de x , le temps d'atteinte de y est fini presque sûrement si y est dans la classe de x . En appliquant le principe précédent au k -ième passage en x , nous voyons qu'il y a au moins un passage en y après chaque passage en x , d'où une infinité de passages en y .

D'autre part, si on part d'un point transitoire, on ne passe qu'au plus un nombre fini de fois en ce point. C'est encore vrai pour chaque point transitoire t , en appliquant le principe précédent au premier temps de passage en t , si celui-ci est fini. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points transitoires, on ne passe qu'un temps fini dans les transitoires. ■

5.2 Excursions.

Nous nous restreignons dans ce qui suit au cas où E est fini, bien que les résultats énoncés s'étendent sans problème au cas dénombrable. Considérons un point x de

E (qui peut être récurrent ou transitoire), et supposons que $\mu_0 = \delta_x$. Définissons par récurrence les n èmes temps de passage en x de la manière suivante

$$T_x^{(0)} = 0, \quad T_x^{(n)} = \inf\{p > T_x^{(n-1)} \mid X_p = x\}.$$

Ces temps peuvent être bien sûr finis ou infinis. Ils sont tous finis si x est récurrent et infinis à partir d'un certain rang (aléatoire) si x est transitoire.

Il est facile de voir que

$$T^{(n+1)} = T^{(n)} + \theta_{T^{(n)}}(T^{(1)}) = T^{(1)} + \theta_{T^{(1)}}(T^{(n)}).$$

On définit la suite suivante, à valeurs dans $\hat{\Omega}$, par

$$Y^{(n)} = (Y_p^{(n)})_{p \geq 0} = X_{p+T^{(n-1)}} \mathbf{1}_{p+T^{(n-1)} \leq T^{(n)}} + \delta \mathbf{1}_{p+T^{(n-1)} > T^{(n)}}.$$

En d'autres termes, la $Y^{(n)}$ est la suite des valeurs prises par la suite X_p entre le $(n-1)$ ème et le n ème passage en x , et mises à la poubelle après. On l'appelle **la n ème excursion de X autour de x** . Il se peut qu'elle soit constante et égale à δ si $T^{(n)} = \infty$. Il y a un petit décalage dans les notations pour ne pas parler de la 0ème excursion.

Noter que $(Y^{(n)})$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\hat{\Omega}$. La mesure image de la probabilité \mathbf{P} par cette application $Y^{(n)}$ est la loi de $Y^{(n)}$, qui est donc une probabilité sur l'espace canonique $\hat{\Omega}$.

On note \mathcal{G}_n la tribu engendrée par $Y^{(n)} : \mathcal{G}_n = \sigma(Y_p^{(n)}, p \geq 0)$.

Théorème 5.12. *Si x est récurrent,*

1. *pour tout n , \mathcal{G}_n est indépendante de $\mathcal{F}_{T^{(n-1)}}$ et incluse dans $\mathcal{F}_{T^{(n)}}$.*
2. *Les tribus \mathcal{G}_n sont indépendantes.*
3. *Les variables $Y^{(n)}$ sont indépendantes et de même loi.*

Si x est transitoire :

1. *\mathcal{G}_n est indépendante de \mathcal{F}_n conditionnellement à $\{T^{(n-1)} < \infty\}$;*
2. *La loi de $Y^{(n)}$ conditionnellement à $\{T^{(n-1)} < \infty\}$ est la même que la loi de $Y^{(1)}$;*

3. $\mathbf{P}(T^{(n)} < \infty) = \mathbf{P}(T^{(1)} < \infty)^n$. Le nombre de passages en x suit donc une loi géométrique.

On a donc décomposé les trajectoires de la suite (X_n) en une suite de "bouts de trajectoires", indépendantes et de même loi.

Démonstration. — Commençons par le cas des points récurrents. Nous voyons que $Y^{(n)} = \theta_{T^{(n-1)}}(Y^{(1)})$. Soit alors Z une variable bornée, \mathcal{G}_n mesurable. Nous voulons montrer que $\mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_{T^{(n-1)}})$ est constante (et sera donc égale à $\mathbf{E}(Z)$). Nous pouvons comme d'habitude nous ramener au cas où la fonction Z s'écrit $Z = F(Y_0^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)})$, auquel cas, si $Z_1 = F(Y_0^{(1)}, \dots, Y_k^{(1)})$, on a $Z = \theta_{T^{(n-1)}}(Z_1)$.

On peut donc écrire

$$\mathbf{E}(Z/\mathcal{F}_{T^{(n-1)}}) = \mathbf{E}_{X_{T^{(n-1)}}}(Z_1) = \mathbf{E}_x(Z_1).$$

On en déduit l'indépendance. On voit aussi que

$$\mathbf{E}(F(Y_0^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)})) = \mathbf{E}_x(F(Y_0^{(1)}, \dots, Y_k^{(1)})).$$

Ceci montre que la loi de $Y^{(n)}$ est la même que celle de $Y^{(1)}$.

Il est d'autre part clair que toutes les variables $Y_k^{(n)}$ sont $\mathcal{F}_{T^{(n)}}$ -mesurables. On en déduit que \mathcal{G}_n est une sous-tribu de $\mathcal{F}_{T^{(n)}}$. Comme elle est indépendante de $\mathcal{F}_{T^{(n-1)}}$, on en déduit que les tribus \mathcal{G}_n sont indépendantes.

Les variables $Y^{(n)}$ sont donc indépendantes et de même loi.

Passons au cas des points transitoires. Il n'y a rien à changer, sauf qu'il faut se restreindre aux ensembles $\{T^{(n-1)} < \infty\}$. La première assertion affirme que, pour toute variable Z \mathcal{G}_n -mesurable, on a

$$\mathbf{E}(Z\mathbf{1}_{T^{(n-1)} < \infty}/\mathcal{F}_{T^{(n-1)}}) = \mathbf{P}_x(T^{(n-1)} < \infty)\mathbf{E}(Z),$$

et la seconde que, si $Z = F(Y_0^{(n)}, \dots, Y_k^{(n)})$, alors

$$\mathbf{E}(Z\mathbf{1}_{T^{(n-1)} < \infty}) = \mathbf{P}(T^{(n-1)} < \infty)\mathbf{E}_x(Z_1),$$

où $Z_1 = F(Y_0^{(1)}, \dots, Y_k^{(1)})$: il suffit de récrire les mêmes identités, il n'y a rien à changer.

Enfin, nous remarquons que $T^{(n)} - T^{(n-1)} = \theta_{T^{(n-1)}}(T^{(1)})$ sur $\{T^{(n-1)} < \infty\}$, et par conséquent, si $A_n = \{T^{(n-1)} < \infty\}$, alors $A_n = A_{n-1} \cap \theta_{T^{(n-1)}}(A_1)$. On a donc

$$\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_{A_{n-1}}\mathbf{E}(\theta_{T^{(n-1)}}\mathbf{1}_{A_1}/\mathcal{F}_{T^{(n-1)}})] = \mathbf{E}(\mathbf{1}_{A_{n-1}}\mathbf{E}_x(\mathbf{1}_{A_1})) = \mathbf{P}_x(A_1)\mathbf{P}(A_{n-1}).$$

D'où la formule par une récurrence immédiate.

L'événement $\{T^{(n)} < \infty\}$ est exactement l'événement "Il y a au moins n passages en x ". D'où l'assertion sur la loi du nombre de passages en x . ■

La décomposition selon les excursions va nous permettre de calculer certaines espérances :

Théorème 5.13. 1. Soit x un point récurrent, soit $y \neq x$ un point de la même classe de récurrence que x , et N_x^y le nombre de passages en y avant le premier retour en x . Alors

$$\mathbf{E}_x(N_x^y) = \frac{\mu(y)}{\mu(x)},$$

où μ est la mesure stationnaire de la classe de x .

2. Si μ est la mesure stationnaire de la classe de x , et si $T_x = \inf\{n > 0 \mid X_n = x\}$ est le temps de retour en x , alors

$$\mathbf{E}_x(T_x) = \frac{1}{\mu(x)}.$$

Démonstration. — On peut se restreindre au cas des chaînes récurrentes irréductibles.

Nous commençons par le premier point. Fixons x et y et appelons N_k le nombre de passages en y entre le $(k-1)$ -ième et le k -ième retour en x . C'est une fonction de la k -ième excursion $Y^{(k)}$ autour de x :

$$N_k = \sum_p \mathbf{1}_{Y_p^k=y}.$$

Ce sont donc des variables aléatoires indépendantes et de même loi.

Par ailleurs, si on appelle F_p le nombre de passages en y avant p et G_p le nombre de passages en x avant p (en ne comptant pas le temps 0), et $T^{(k)}$ le k -ième temps de passage en x , nous avons $\sum_1^k N_i = F_{T^{(k)}}$ et $k = G_{T^{(k)}}$. Nous avons donc

$$\frac{\sum_1^k N_i}{k} = \frac{F_{T^{(k)}}}{G_{T^{(k)}}} = \frac{F_{T^{(k)}}}{T^{(k)}} \frac{T^{(k)}}{G_{T^{(k)}}}.$$

Le théorème ergodique nous dit que les suites F_n/n et G_n/n convergent presque sûrement vers $\mu(y)$ et $\mu(x)$, respectivement. Et puisque la suite $T^{(k)}$ converge vers l'infini, la limite de $(\sum_1^k N_i)/k$ vaut $\mu(y)/\mu(x)$. Mais il s'agit d'une somme de

variables aléatoires indépendantes et de même loi : la moyenne ne peut converger presque sûrement que si les variables sont intégrables, et dans ce cas la limite est égale à l'espérance.

On obtient donc le premier point.

Le second s'obtient en sommant sur tous les points $y \neq x$

$$\sum_{y \neq x} N_x^y = T_x - 1.$$

D'où

$$\mathbf{E}_x(T_x - 1) = \sum_{x \neq y} \mu(y)/\mu(x) = \frac{1}{\mu(x)} - 1.$$

Nous avons démontré la formule. ■

Enfin, la propriété de Markov forte permet de construire de nouvelles chaînes de Markov à partir de l'ancienne; par exemple

Proposition 5.14. *Soit (X_n) de Markov homogène de matrice P et soit T_n la suite de temps d'arrêts définis de la façon suivante : $T_0 = 0$, $T_{n+1} = \inf\{p > T_n \mid X_p \neq X_{T_n}\}$. Ce sont les temps de sauts successifs de la chaîne; on a posé comme toujours $\inf\{\emptyset\} = \infty$, et $X_{T_{n+1}} = X_{T_n}$ si $T_{n+1} = \infty$. Alors, la suite $(Y_n) = (X_{T_n})$ est une chaîne de Markov homogène de matrice de transition Q donnée par*

$$Q(x, x) = 0; \quad Q(x, y) = P(x, y)/(1 - P(x, x)) \text{ pour } x \neq y,$$

sauf si $P(x, x) = 1$, auquel cas $Q(x, x) = 1$.

Démonstration. — La loi de Y_{n+1} connaissant \mathcal{F}_{T_n} ne dépend que de X_{T_n} , c'est à dire que de Y_n . D'autre part, $(Y_{n+k}) = \theta_{T_n}((Y_k))$, et la loi de Y_{n+1} sachant que $X_{T_n} = x$ est celle de Y_1 sachant que $X_0 = x$.

Calculons cette loi : si $P(x, x) = 1$, la suite X_n est constante égale à x , et il en va de même de la suite Y_n par définition. Et donc $Q(x, x) = 1$ dans ce cas. Sinon, nous écrivons, pour $x \neq y$,

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= \mathbf{E}_x(Y_1) = \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}_x(T_1 = k, X_k = y) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}_x(T_1 > k - 1, X_k = y) \\ &= \sum_{k \geq 1} \mathbf{P}_x(T_1 > k - 1)P(x, y) \end{aligned}$$

Or, $P_x(T_1 > k - 1) = \mathbf{P}_x(X_1 = x, X_2 = x, \dots, X_{k-1} = x) = P(x, x)^{k-1}$. On obtient donc $Q(x, y) = P(x, y) \sum_{k \geq 0} P^k(x, x) = P(x, y) / (1 - P(x, x))$.

Remarquons que nous avons montré au passage que la loi de T_1 est géométrique de raison $P(x, x)$. C'est aussi la loi de $T_n - T_{n-1}$ sachant que $X_n = x$.

■